GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

3. Übungsblatt (erschienen am 02.12.2020)

Aufgabe 3.1 (Votieraufgabe)

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, Σ_{ext} bezeichne den Außenraum und Σ_{int} den Innenraum. Sei $F, G \in C^{(0)}(\Sigma)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Lösung $U \in C^{(2)}(\Sigma_{int}) \cap C^{(1)}(\overline{\Sigma_{int}})$ des Problems

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 && \text{in } \Sigma_{int}, \\ \frac{\partial U^-}{\partial \nu}(x) + H(x)U^-(x) &= F(x) && \text{für } x \in \Sigma \end{aligned}$$

ist eindeutig, wenn $H \geq 0$ und $H \neq 0$.

(b) Die Lösung $U \in C^{(2)}(\Sigma_{ext}) \cap C^{(1)}(\overline{\Sigma_{ext}})$ des Problems

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 && \text{in } \Sigma_{ext}, \\ |U(x)| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), && |x| \to \infty, \\ |\nabla U(x)| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), && |x| \to \infty, \\ \frac{\partial U^+}{\partial \nu}(x) + H(x)U^+(x) &= F(x) && \text{für } x \in \Sigma \end{aligned}$$

ist eindeutig, wenn $H \leq 0$.

Aufgabe 3.2 (Votieraufgabe)

Bestimmen Sie die Greensche Funktion bezüglich des äußeren Dirichlet Problems

$$\begin{aligned} &U \in \mathrm{Pot}^{(0)}(\overline{\Omega_R^{ext}}), \\ &U^+ = F \text{ auf } \Omega_R \end{aligned}$$

mit $\Omega_R^{ext} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > R, R > 0\}$.

Aufgabe 3.3 (Schriftliche Aufgabe)

<u>Definition:</u>

Die Legendre-Polynome $P_n(t)$ sind eindeutig durch folgende drei Eigenschaften bestimmt:

(i) $P_n(t)$ ist ein Polynom vom Grad n

(ii) $\int\limits_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\,dt = 0$, wenn $m \neq n$

(iii) $P_n(1) = 1$

Berechnen Sie die ersten drei Legendre-Polynome $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$ basierend auf den genannten Eigenschaften.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden. Die eingescannte Abgabe soll als PDF-Datei bis zum 14.12.2020 um 12:00 Uhr an Ihre Übungsleiterin geschickt werden. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe zur Einführung in die Potentialtheorie* an.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 3 werden in der Übung (via Zoom) am 16.12.2020 besprochen.