Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2023
17. April 2023

Modulformen
Prof. Dr. Martin Möller
Lucas Gerth
Johannes Schwab

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige den *Additionssatz von Fagnano* für $F(z) := \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$, d.h. in einer kleinen Umgebung von 0 gilt

$$2F(z) = F\left(2z\frac{\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}\right).$$

Hinweis: Was bewirkt die Substitution

$$t^2 = \frac{2s^2}{1+s^4}$$

in der Integralfunktion F?

Zeige anschließend: F ist lokal um 0 invertierbar und für die Umkehrfunktion G gilt

$$G(2u) = \frac{2G(u)G'(u)}{1+G(u)^4}$$

in einer kleinen Umgebung von 0.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}b_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}b_n \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter in $\mathbb{R}^n$.

(a) Beweisen Sie, dass das euklidische Volumen der Fundamentalmasche $F(b_1, \ldots, b_n) := \{x = \sum_{i=1}^n a_i b_i \in \mathbb{R}^n : 0 \leq a_i \leq 1\}$ durch

$$\mathrm{vol}(F(b_1, \ldots, b_n)) = |\det([b_1| \cdots |b_n])|$$

gegeben ist. Hierbei sei das euklidische Volumen durch $\mathrm{vol}([0,1]^n) = 1$ normalisiert.

(b) Beweisen Sie, dass das Volumen der Fundamentalmasche unabhängig von der Gitter-Basiswahl ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeige die Kronecker-Approximation: Zu jeder positiven ganzen Zahl N und allen $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ gibt es $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$ nicht alle Null mit den Eigenschaften

$$|m_i| \leq N \quad \text{und} \quad |m_1w_1 + m_2w_2 + m_3w_3| < \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \cdot \max\{|w_1|, |w_2|, |w_3|\}$$

Hinweis: Sei $M := \max\{|w_1|, |w_2|, |w_3|\}$. Betrachte das achsenparallele Quadrat in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt 0 und Kantenlängen $6MN$.

(b) Folgere das Lemma von Jacobi: Ist Ω eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$ und sind $w_1, w_2, w_3 \in \Omega$ gegeben, dann gibt es $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$ nicht alle Null so dass

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3 = 0.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ eine diskrete Untergruppe mit $A_0 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$. Beweisen Sie, dass wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $c \neq 0$, dann gilt $|c| \geq 1$.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ induktiv definiert durch $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $0 < |c| < 1$ und $A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1}$.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 17. April**.