Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2023
25. April 2023

Modulformen
Prof. Dr. Martin Möller
Lucas Gerth
Johannes Schwab

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige für $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) Λ ist ein Gitter.

(b) Λ ist eine diskrete Untergruppe des $\mathbb{R}^n$, die in keiner Hyperebene enthalten ist.

Hinweis: Versuche das Argument aus Satz 2.8 per Induktion auf n Dimensionen zu übertragen.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Wir definieren die Mengen

$$g_2(\Lambda) \coloneqq 60G_4(\Lambda), \quad g_3(\Lambda) \coloneqq 140G_6(\Lambda)$$

Zeige: $\wp$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\big(\wp'(z)\big)^2 = 4\wp^3(z) - g_2(\Lambda)\wp(z) - g_3(\Lambda).$$

Hinweis: Zeige, dass die Differenz beider Seiten holomorph und periodisch ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ die Projektion. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{C}/\Lambda &\longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^3 - \{0\})/\mathbb{C}^\times \\ t = \pi(z) &\longmapsto \begin{cases} (\wp(z) : \wp'(z) : 1), & \text{wenn } z \notin \Lambda \\ (0 : 1 : 0), & \text{wenn } z \in \Lambda \end{cases} \end{aligned}$$

injektiv ist und das Bild

$$E_\Lambda \coloneqq \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \mid y^2 z = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3\}$$

besitzt.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} \oplus \lambda_2\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ ein Gitter mit $\lambda_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\lambda_2 \in i\mathbb{R}_{>0}$.

(a) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$. Zeige: $\wp(z)$ ist genau dann reell, wenn es ein $\lambda \in \Lambda$ mit

$$z \in \frac{\lambda}{2} + \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad z \in \frac{\lambda}{2} + i\mathbb{R} \quad \text{gibt.}$$

Hinweis: Zeige, dass $\wp(z) = \wp(\lambda_1 + \overline{z}) = \wp(\lambda_1 + \lambda_2 - z) = \wp(\lambda_2 - \overline{z})$, falls $\wp(z) \in \mathbb{R}$.

(b) Zeige, dass die Funktion ϕ von Aufgabe 3 eine Bijektion zwischen

$$\{t = \pi(z) \mid z = \frac{\lambda}{2} + a,\, \lambda \in \Lambda,\, a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \coprod \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

und

$$E_\Lambda(\mathbb{R}) \coloneqq \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid y^2 z = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3\}$$

definiert.

(c) Zeige: Die $\wp$-Funktion bildet das Rechteck

$$R = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\lambda_1}{2},\ 0 < \Im z < \Im \frac{\lambda_2}{2} \right\}$$

biholomorph auf die untere Halbebene $\mathbb{H}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$ ab.

Hinweis: $\wp(R)$ ist zusammenhängend und $\wp(2R) = \mathbb{C}$!

(d) Gib eine biholomorphe Abbildung an, die das Einheitsquadrat

$$Q = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z, \Im z < 1\}$$

auf die Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ abbildet.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 1. Mai**.