Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2023
1. Mai 2023

Modulformen
Prof. Dr. Martin Möller
Lucas Gerth
Johannes Schwab

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe und $\mathbb{Z}$-periodische Funktion. Zeige: f besitzt eine *Fourier-Entwicklung*, d.h. für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$f(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f) q^n, \quad a_n(f) \in \mathbb{C}, \quad q = e^{2\pi i \tau},$$

wobei diese Reihen lokal gleichmäßig konvergieren.

Hinweis: Laurent Reihe.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Erinnere dich an den Kotangens:

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}.$$

Zeige: Er besitzt (für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$) eine Partialbruchzerlegung

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).$$

Hinweis: Betrachte für festes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ die Funktion

$$f(w) = \frac{z}{w(z-w)}\pi\cot(\pi w).$$

Zeige, dass f als Singularitäten nur Pole 1. und 2. Ordnung besitzt und außerhalb von $\{z\} \cup \mathbb{Z}$ holomorph ist. Betrachte dann für ein geeignetes Quadrat $Q \subset \mathbb{C}$ (dessen Rand keine Singularitäten von f enthält!) das Wegintegral von f und zeige

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial Q} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = -\pi\cot(\pi z) + \frac{1}{z} + \sum_{0<|n|\leq N}\frac{z}{n(z-n)}$$

für geeignetes $N \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(a) Zeige: Für $k \in \mathbb{N}$ existieren eindeutig bestimmte *rationale* Zahlen B_k, so dass für $|z| < 2\pi$

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{\mathrm{e}^z + 1}{\mathrm{e}^z - 1} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k B_k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

gilt. Die B_k heißen *Bernoulli-Zahlen.*

Hinweis: Potenzreihenentwicklung und Cauchy-Produkt!

(b) Zeige: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt
$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_k \pi^{2k}.$$
Dabei ist $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$, die Riemannsche Zetafunktion.

Hinweis: Zeige mit Hilfe von Aufgabe 2:
$$z \cot z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{2^{2k} z^{2k}}{(2k)!} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k} \pi^{2k}}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $\mathbb{H}^{\pm} := \{\tau = x + iy \in \mathbb{C} \mid y \neq 0\}$. Beweisen Sie dass

(a) Die Abbildung
$$\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^{\pm} \to \mathbb{H}^{\pm}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$
eine transitive Wirkung ist.

(b) Beweisen Sie, dass die einzigen Matrizen, die trivial auf $\mathbb{H}^{\pm}$ wirken, die Skalarmatrizen sind.

(c) Beweisen Sie, dass für $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $\tau \in \mathbb{H}^{\pm}$
$$\Im(g \cdot \tau) = \det(g) \frac{\Im(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$
Folglich beschränkt sich die Wirkung auf eine transitive Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$.

(d) Sei
$$\mathrm{Stab}(i) := \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \colon g \cdot i = i\}$$
der Stabilisator von $i \in \mathbb{H}$. Beweisen Sie, dass
$$\mathrm{Stab}(i) = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),$$
wobei
$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

(e) Zeige: Jede Matrix $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ besitzt eine *Iwasawa-Zerlegung*, d.h. für jedes $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ existieren $a \in A$, $n \in N$ und $k \in K$ mit $g = ank$. Dabei ist
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R},\ a > 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad K = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}).$$
Insbesondere gilt also $G = ANK$.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 8. Mai**.