Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2023
5. Mai 2023

Modulformen
Prof. Dr. Martin Möller
Lucas Gerth
Johannes Schwab

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wir betrachten nun die eingeschränkte Operation von $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$. Sei

$$\overline{F} = \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1 \text{ und } |\operatorname{Re}\tau| \leq \tfrac{1}{2}\}$$

der Abschluss des aus der Vorlesung bekannten Fundamentalbereichs. Sei zudem $\rho = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/6}$.

(a) Zeige: Für $\tau \in \overline{F}$ gilt für den Stabilisator

$$\Gamma_\tau \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{wenn } \tau \neq \mathrm{i}, \rho, \rho^2, \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{wenn } \tau = \mathrm{i}, \\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \text{wenn } \tau = \rho, \rho^2. \end{cases}$$

Gib einen Erzeuger (in Abhängigkeit von -1, S und T) an.

(b) Seien nun $\Lambda_\mathrm{i} = \mathrm{i}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ und $\Lambda_\rho = \rho\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ die zu i und ρ gehörigen Gitter.

Zeige: $g_3(\mathrm{i}) = 0$ und $g_2(\rho) = 0$.

Hinweis: Zeige zunächst: $\mathrm{i}\Lambda_\mathrm{i} = \Lambda_\mathrm{i}$ und $\rho\Lambda_\rho = \Lambda_\rho$.

(c) Folgere, dass $j(\mathrm{i}) = 1728$ und $j(\rho) = 0$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, wir definieren

$$\mathrm{End}(\Lambda) \coloneqq \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha\Lambda \subset \Lambda\}$$

Zeige, dass es eine Ring mit Einheten

$$\mathrm{Aut}(\Lambda) \coloneqq \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha\Lambda = \Lambda\}$$

ist. Wenn Λ bereits ein Ring ist, zeige dass $\mathrm{End}(\Lambda) = \Lambda$.

(b) Nehmen wir an, dass Λ so gewählt ist, dass $\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\Lambda)$. Sei K der Quotientkörper von $\mathrm{End}(\Lambda)$. Zeige: K ist eine imaginäre quadratische Körper, d.h. $K \not\subset \mathbb{C}$ und K ist ein 2-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

Hinweis: Sei $\alpha \in \mathrm{End}(\Lambda)\setminus\mathbb{Z}$. Finde ein monisches Polynom $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad 2, so dass $f(\alpha) = 0$.

(c) Sei $\tau \in \mathbb{H}$ und $\Lambda_\tau = \tau\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Zeige dass es einen Groupenisomorphismsus

$$\Gamma_\tau \cong \mathrm{Aut}(\Lambda_\tau)\,, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto c\tau + d,$$

gibt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Für $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\pi_n \colon \Gamma \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ die kanonische Projektion. Wir nennen $\Gamma[n] = \operatorname{Kern} \pi_n$ die *Hauptkongruenzgruppe* (mod n).

(a) Zeige: π_n ist surjektiv und somit ist $\Gamma[n]$ stets ein Normalteiler von endlichem Index.

Hinweis: Zeige zunächst: Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $c \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$ gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathrm{ggT}(a + xb, c) = 1$.

(b) Zeige: Für $n \geq 2$ operiert $\Gamma[n]$ fixpunktfrei auf $\mathbb{H}$, d.h. für alle $\tau \in \mathbb{H}$ ist $\Gamma[n]_\tau = \{\pm 1\}$ für $n = 2$ und sogar trivial für $n > 2$.

(c) Gib ein Vertretersystem der Nebenklassen von $\Gamma[2]$ in Γ an.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

(a) Zeige: Für $N \in \mathbb{N}$ ist

$$\sharp\, \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = N^3 \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

wobei das Produkt über alle Primteiler p von N läuft.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für jede Primzahl p und $e \in \mathbb{N}$

$$\sharp\, \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}) = p^{3e} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

gilt.

(b) Seien

$$\Gamma_0[N] := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\ N) \right\}$$

und

$$\Gamma_1[N] := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\ N) \right\}$$

Zeige: $\Gamma_0[N]/\Gamma_1[N] \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ und $\Gamma_1[N]/\Gamma[N] \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Hinweis: Wähle eine Projektion auf eine geeignete Koordinate.

(c) Zeige: Für den Index von $\Gamma_0[N]$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0[N]] = N \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

wobei p die Primteiler von N durchläuft.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 15. April**.