Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2023
15. Mai 2023

Modulformen
Prof. Dr. Martin Möller
Lucas Gerth
Johannes Schwab

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und X die Menge der Tupel (Λ, w_1, w_2), wobei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und (w_1, w_2) eine geordnete Basis von Λ sind.

(a) Die Gruppe $\mathbb{C}^\times$ wirke auf X via $(\Lambda, w_1, w_2) \cdot \alpha := (\alpha\Lambda, \alpha w_1, \alpha w_2)$. Zeige, dass

$$\Phi\colon \mathbb{H} \longrightarrow X/\mathbb{C}^\times\,, \quad \tau \longmapsto [\Lambda_\tau = \tau\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, \tau, 1]$$

eine Bijektion ist.

(b) Die Gruppe Γ wirke auf $X/\mathbb{C}^\times$ über

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot [\Lambda, w_1, w_2] := [\Lambda, aw_1 + bw_2, cw_1 + dw_2]$$

Zeige: diese Aktion ist wohldefiniert und die Bijektion Φ ist Γ-äquivariant. Leiten Sie ab, dass Φ eine Bijektion

$$\Gamma\backslash\mathbb{H} \longrightarrow \{\, \Lambda \subset \mathbb{C} \text{ Gitter } \,\}/\mathbb{C}^\times$$

induziert.

(c) Sei $N \geq 2$. Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und betrachte den zugehörigen komplexen Torus $\mathbb{C}/\Lambda$. Ein Punkt $t \in \mathbb{C}/\Lambda$ sei von exakter Ordnung N, wenn $Nt = 0$ und N minimal für diese Eigenschaft ist. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \Gamma_1(N)\backslash\mathbb{H} &\longrightarrow \{\, (\Lambda, t) \mid \Lambda \subset \mathbb{C} \text{ Gitter, } t \text{ von exakter Ordnung } N \,\}/\mathbb{C}^\times \\ \tau &\longmapsto [\Lambda_\tau, \frac{\tau}{N}] \end{aligned}$$

eine Bijektion ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Sei $j\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ die j-Funktion. Zeigen Sie, dass sie einen Homöomorphismus

$$\Gamma\backslash\mathbb{H} \to \mathbb{C}$$

induziert.
Hinweis: Die Injektivität von j wurde im Unterricht besprochen. Um Surjektivität zu beweisen, zeige, dass das Bild von j offen und geschlossen ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $M_k^{\mathbb{Z}} \subset M_k$ die ganzen Modulformen, deren Fourier-Koeffizienten alle ganzzahlig sind, d.h.

$$f(\tau) = \sum_{d \geq 0} a_d q^d \quad \text{mit} \quad a_d \in \mathbb{Z}\ \forall d.$$

Wir nennen $f \in M_k^{\mathbb{Z}}$ *normiert*, falls $a_0 = 1$.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die normierte Diskriminante $\Delta^* = (2\pi)^{-12}\Delta$ in $M_{12}^{\mathbb{Z}}$ liegt und normiert ist.

Zeige: Für jedes $k \geq 12$ und für jedes normierte $g \in M_k^{\mathbb{Z}}$ gilt

$$M_k^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cdot g \oplus M_{k-12}^{\mathbb{Z}} \cdot \Delta^*, \quad \text{wobei} \quad M_0^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad M_2^{\mathbb{Z}} = \{0\} \quad \text{sind.}$$

Zeige außerdem: $M_k^{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = M_k$.

Insbesondere gilt für alle k: $\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} M_k^{\mathbb{Z}} = \dim_{\mathbb{C}} M_k$.

Hinweis: Proposition 2.26.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir lassen $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch Möbiustransformationen auf $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ operieren.

(a) Bestimme $\Gamma \cdot \infty$, die Bahn von ∞, so wie Γ_∞, den Stabilisator von ∞.

(b) Wir bezeichnen mit E_k die normierte Eisensteinreihe vom Gewicht k.

Zeige: Für $k \geq 4$ gerade gilt

$$E_k = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k = 1 + ß^k \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(d) q^d.$$

(c) Zeige weiter: Für $k \geq 4$ gerade ist

$$E_k(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1|_k \gamma(\tau)$$

wobei die Summe über die Rechtsnebenklassen von Γ_∞ in Γ läuft.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 22. Mai**.