Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2023
22. Mai 2023

Modulformen
Prof. Dr. Martin Möller
Lucas Gerth
Johannes Schwab

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir kennen die Gruppen $\Gamma[n] = \mathrm{Kern}(\Gamma \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \lhd \Gamma$.

(a) Gib ein Vertretersystem der Bahnen der Operation von $\Gamma[2]$ auf $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ an.

(b) Sei $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f|_k\gamma = f$ für alle $\gamma \in \Gamma[n]$ für festes $n > 1$.

Gib eine Fourierentwicklung von f an.

Hinweis: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \notin \Gamma[n]$ aber $\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma[n]$.

(c) Sei f wie eben. Wir nennen f eine *Modulform von Gewicht k zur Kongruenzgruppe* $\Gamma[n]$ falls zusätzlich $f|_k\gamma$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ auf $\{\Im\tau > C\}$ für ein $C > 0$ beschränkt ist.

Zeige: $E_k^\infty[2] \coloneqq \sum_{\gamma \in \Gamma[2]_\infty \backslash \Gamma[2]} 1|_k\gamma$ ist eine Modulform von Gewicht k für $\Gamma[2]$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $1 < N \in \mathbb{N}$ und $k \geq 4$ gerade. Zu einem Zeilenvektor $v \in \mathbb{Z}^2$, dessen Bild $\overline{v} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ von Ordnung N ist, definieren wir (für $\tau \in \mathbb{H}$)

$$E_k^{\overline{v}}(\tau) = \varepsilon_N \sum (c\tau + d)^{-k},$$

wobei über teilerfremde $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ mit $(c,d) \equiv v \bmod N$ summiert wird und $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ und $\varepsilon_N = 1$ für $N > 2$ ist.

(a) Zeige: $E_k^{\overline{v}} \in M_k(\Gamma[N])$.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für alle $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Gleichheit

$$\left(E_k^{\overline{v}}|_k\gamma\right)(\tau) = E_k^{\overline{v\gamma}}(\tau)$$

gilt. Dabei bezeichnet $\bar{\cdot}$ die kanonische Projektion mod N.

(b) Sei nun $N = 2$. Zeige: Für $\overline{v} = \overline{(0,1)}$ ist

$$\lim_{\tau \to \infty} E_k^{\overline{v}} = 1$$

und der Grenzwert ist 0 für alle anderen gültigen Wahlen von $\overline{v}$.

(c) Für $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\gamma \cdot \infty = 0$ und f eine Modulform vom Gewicht k zu $\Gamma[2]$ sagen wir, dass f *bei der Spitze* 0 *verschwindet*, falls

$$\lim_{\tau \to \infty} \big(f|_k\gamma\big)(\tau) = 0.$$

Analog sei das Verschwinden bei anderen Spitzen definiert.

Sei nun $\overline{v} = \overline{(1,0)}$ und $\gamma \cdot \infty = 0$.

Zeige: $\lim_{\tau \to \infty} \big(E_k^{\overline{v}}|_k\gamma\big)(\tau) = 1$ und für zulässige $\overline{w} \neq \overline{v}$ verschwindet $E_k^{\overline{w}}$ bei 0.

Was passiert im Fall $\tau \to 1$?

Folgere, dass $E_k^{\overline{(1,0)}}$, $E_k^{\overline{(0,1)}}$ und $E_k^{\overline{(1,1)}}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei, für $n \geq 0$

$$r(n) = |\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + 2b^2 = n\}$$

Sei χ der Dirichlet-Charakter modulo 8 mit

$$\chi(1) = 1\,, \quad \chi(3) = 1\,, \quad \chi(5) = 1\,, \quad \chi(7) = -1,$$

das wir auf $\mathbb{N}$ ausdehnen, indem wir $\chi(n) = 0$ für gerade n und $\chi(n) \coloneqq \chi(n \text{ modulo } 8)$ für ungerade n setzen.

(a) Zeige: Die Thetafunktion

$$f(\tau) \coloneqq 1 + \sum_{n \geq 1} r(n) q^n = \sum_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2} q^{a^2+2b^2}$$

ist ein Modulform von Gewicht 1 zum Dirichlet-Charakter χ auf der Gruppe $\Gamma_0(8)$.

Hinweis: Satz 5.7.

(b) Zeige, dass

$$r(n) = 2 \sum_{d|n} \chi(d).$$

Hinweis: Sie können frei verwenden, dass $M_1(\Gamma_0(8), \chi)$ Dimension 1 hat, und dass $c_1(\chi) = 1/2$.

Aufgabe 4 (1 Punkt)

Sehen Sie sich das Video von 3Blue1Brown 'π hiding in prime regularities' an.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 29. Mai**.