GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

5. Übungsblatt (erschienen am 13.5.2024)

Wir betrachten in den ersten drei Aufgaben dieses Blattes das **Gradientenverfahren mit Armijoregel** mit Parametern $\gamma = 0.5$ und $\beta \in (0.5, 1)$ betrachten. Dazu sei stets $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^\mathsf{T} Cx$, mit $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit. Dann wählen wir als Suchrichtung $d_k = -\nabla f(x_k)$ und die Schrittweiten $s_k \in \{1, \beta, \beta^2, ..\}$ werden bestimmt als die größte Zahl, so dass

$$f(x_k + s_k d_k) - f(x_k) \leq \frac{1}{2} s_k \nabla f(x_k)^T d_k.$$

Aufgabe 5.1 (Votieraufgabe)

(a) Überzeugen Sie sich, dass $\bar{x} = 0$ das (eindeutige) globale Minimum von f ist.

(b) Sei $x \neq 0$ und $d = -\nabla f(x)$ sowie $t > 0$. Zeigen Sie, dass

$$f(x + td) - f(x) \leq -\frac{1}{2} t||d||^2$$

genau dann wenn $t \leq \frac{\|d\|^2}{d^T Cd}$.

Aufgabe 5.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen, welche durch obiges Verfahren erzeugt wurden (das Verfahren terminiert also nicht vorzeitig an einem stationären Punkt). Wir wollen zeigen, dass $L \in (0, 1)$ und $K \in \mathbb{R}$ existieren mit:

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq L^k K$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Überlegen Sie anschließend wie L von der Kondition $\kappa(C)$ abhängt.
Zeigen Sie dazu:

(a) Es gilt

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) - s_k||d_k||^2 + \frac{s_k^2}{2} d_k^T C d_k.$$

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert $j = j(x_k) \in \mathbb{N}$ mit

$$s_k||d_k||^2 - \frac{s_k^2}{2} d_k^T C d_k \geq \frac{f(x_k)}{\kappa(C)} \left(2\beta^j - \beta^{2(j-1)}\right).$$

(c) Es existiert $L' \in (0, 1)$ mit

$$f(x_{k+1}) \leq L' f(x_k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Verwenden Sie die MATLAB-Funktion von Übungsblatt 3

$$\texttt{function [z,fz] = Gradient\_mit\_Armijo(f, } \nabla\texttt{, z0, } \beta\texttt{, } \gamma\texttt{)}$$

welche das Gradientenverfahren mit Armijoregel realisiert.

(a) Verwenden Sie diese MATLAB-Funktion, um das globale Minimum von $f(x, y) = x^2 + 100y^2$ zu bestimmen, mit Startwert $z_0 = [10, 1]$, sowie $\beta = 0.75$ und $\gamma = 0.5$. Plotten Sie $\log(\|z_k\|)$ gegen k um die Konvergenzgeschwindigkeit zu visualisieren.

(b) Zeichnen Sie die Höhenlinien der Funktion $f(x, y) = x^2 + 100y^2$ und in dasselbe Bild die Folge der Iterierten (als Polygonzug) aus der Teilaufgabe **(a)**.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 21.5.2024 um 10 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist ein kommentierter `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

---

* **Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**