

Übung 1

Abgabe des schriftlichen Teils bis Donnerstag, 24.10.

 Abgabe der Programmieraufgabe bis Mittwoch, 23.10.

Aufgabe 1: [Festkommazahlen]

Die Menge der Festkommazahlen mit Mantissenlänge $M \in \mathbb{N}$ und $N \in \{0, \dots, M\}$ Nachkommastellen zur Basis b ist durch $F_{M,N}^b := \{\tilde{x} = \pm \sum_{k=1}^M a_k b^{M-N-k} : a_j \in \{0, \dots, b-1\}, j = 1, \dots, M\}$ gegeben.

- Geben Sie das größte und das kleinste echt positive Element \tilde{x}_{\max} und \tilde{x}_{\min} von $F_{M,N}^b$ an.
- Aus der Analysis 1 ist bekannt, dass man jede reelle Zahl in der Form $x = \pm b^n \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b^{-k}$ mit $\alpha_j \in \{0, \dots, b-1\}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ darstellen kann. Definieren Sie eine Rundungsfunktion

$$\text{rd} : [-\tilde{x}_{\max}, \tilde{x}_{\max}] \rightarrow F_{M,N}^b,$$

sodass $|x - \text{rd}(x)| = \text{dist}(x, F_{M,N}^b)$. Gibt es mehr als ein Element von $F_{M,N}^b$ mit minimalem Abstand zu x , so nehmen Sie das betragsmäßig größte.

- Geben Sie im Fall $M = 7, N = 2, b = 3$ jeweils $\text{rd}(x_i)$ zu den Zahlen $x_1 = 22, x_2 = 13.5$ und $x_3 = \frac{1}{4}$ in der Darstellung $\tilde{x} = \pm a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 . a_6 a_7$ an.

Punkte: 2/3/3

Aufgabe 2: [Rekursion]

Gegeben sei die Folge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $y_i = \frac{1}{e} \int_0^1 e^x x^i dx$.

- Zeigen Sie die Abschätzungen

$$\frac{1}{e(i+1)} < y_i < \frac{1}{i+1} \quad \text{und} \quad y_{i+1} < y_i.$$

- Bestimmen Sie je eine Vorwärts- und eine Rückwärtsrekursionsformel, mit der der Wert y_i aus y_{i-1} bzw. y_{i+1} bestimmt werden kann.
- Anstelle der exakten Startwerte y_0 bzw. y_k seien genäherte Startwerte \tilde{y}_0 bzw. \tilde{y}_k gegeben. Wie lauten die absoluten Fehler $\Delta y_i = y_i - \tilde{y}_i$ bei Vorwärts- und Rückwärtsrekursion in Abhängigkeit von Δy_0 bzw. Δy_k ?

Punkte: 6/3/3

Aufgabe 3: [Programmieraufgabe]

Eine natürliche Zahl Z lässt sich für N Stellen und Basis b darstellen als

$$Z = \sum_{i=0}^{N-1} d_i b^i \hat{=} d_{N-1} d_{N-2} \dots d_0 \quad \text{für } d_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}.$$

Schreiben Sie in Scilab oder Matlab eine Funktion *basiswechsel(d,b,c)*, welche eine natürliche Zahl in einer vorgegebenen Basis in eine andere Basis transformiert. Inputparameter sind also ein Vektor $d = (d_{N-1}, d_{N-2}, \dots, d_0)$, welcher einer natürlichen Zahl in der Basis b entspricht, sowie eine weitere Basis c , in welche diese Zahl transformiert werden soll. Output der Funktion ist ein Vektor e , welcher der vorgegebenen Zahl in der neuen Basis c entspricht.

Bestimmen sie mit Ihrer Funktion die Darstellung der Zahl $d = (4, 2, 0, 1, 3, 2, 3, 4, 1)$ mit Basis $b = 5$ in der neuen Basis $c = 3$.

Punkte: 10

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte