

Übung 2

Abgabe bis Donnerstag, 31.10.

Aufgabe 4: [Fehlerfortpflanzung]

Wir wollen nun die Fortpflanzung von Fehlern bei der Durchführung der vier arithmetischen Grundoperationen (+, −, ·, /) betrachten. Die Zahlen x und y seien mit Fehlern Δx und Δy behaftet, wobei $|\frac{\Delta x}{x}|, |\frac{\Delta y}{y}| \ll 1$ gelte. Zeigen Sie, dass selbst bei exakter Rechnung (also ohne weitere Rundungsfehler) für die relativen Fehler der Ergebnisse die folgenden Aussagen gelten:

$$(a) \quad \frac{(x + \Delta x) + (y + \Delta y) - (x + y)}{x + y} = \frac{x}{x + y} \cdot \frac{\Delta x}{x} + \frac{y}{x + y} \cdot \frac{\Delta y}{y}$$

$$(b) \quad \frac{(x + \Delta x) - (y + \Delta y) - (x - y)}{x - y} = \frac{x}{x - y} \cdot \frac{\Delta x}{x} - \frac{y}{x - y} \cdot \frac{\Delta y}{y}$$

$$(c) \quad \frac{(x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - (x \cdot y)}{x \cdot y} \approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

$$(d) \quad \frac{(x + \Delta x)/(y + \Delta y) - (x/y)}{x/y} \approx \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}$$

- (e) Falls der relative Fehler des Ergebnisses sehr viel größer ist, als der relative Fehler der Eingabedaten, so spricht man von Auslöschung. In welchen der obigen Fälle kann Auslöschung auftreten?

Punkte: 10

Aufgabe 5: [Rundung]

- (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Ausdrücke mathematisch äquivalent sind:

- $((a + b)(a - b))^2$
- $(a^2 + b^2)^2 - 4(ab)^2$
- $(a^2 - b^2)^2$

- (b) Seien nun $a = 10^6 + 2$ und $b = 10^6 - 1$. Berechnen Sie obige Ausdrücke mit 10 Dezimalstellen. Runden Sie dabei nach *jedem* Rechenschritt das Teilergebnis.

- (c) Berechnen Sie jeweils den relativen Fehler der Resultate (2 gültige Ziffern genügen). Was ist der Grund für dieses Verhalten?

Punkte: 8

Aufgabe 6: [Auslöschung]

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass für die angegebenen Argumente Auslöschung vermieden wird:

- $\sqrt[3]{1 + x} - 1$ für $x \approx 0$
- $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$ für $x \approx 0$
- $\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ für $x \gg 1$

Punkte: 6

Aufgabe 7: [Programmieraufgabe]

Schreiben Sie ein Scilab- oder Matlab-Programm, das die Werte y_0, y_1, \dots, y_k aus Aufgabe 2 (Blatt 1) für $k = 30$ mittels Vorwärts- und Rückwärtsrekursion berechnet. Verwenden Sie als Startwert für die Vorwärtsrekursion den exakten Wert

$$y_0 = \frac{e - 1}{e}$$

und als Startwert für die Rückwärtsiteration die Werte

$$y_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e(k+1)} + \frac{1}{k+1} \right) \quad \text{und} \quad y_k = 10^6,$$

also das arithmetische Mittel der Abschätzungen oben und einen vollkommen schlechten Wert. Stellen Sie die Ergebnisse tabellarisch dar und beurteilen Sie sie im Hinblick auf Aufgabe 2(c).

Punkte:

10
