3. Übungsblatt zur Vorlesung

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Alle Lösungen sind (ggf. inklusive Programmcode und Programmausgabe) in Papierform abzugeben. Der Programmcode ist der Tutorin noch einmal separat per Mail zuzuschicken.

Aufgabe 3.1 (Verfahren höherer Ordnung)

a) Zeigen Sie, dass das numerische Verfahren

$$w_{j+1} = w_j + h \left\{ (1 - \frac{1}{2\beta}) f(t_j, w_j) + \frac{1}{2\beta} f(t_j + \beta h, w_j + \beta h f(t_j, w_j)) \right\}$$

für jedes $\beta \in [\frac{1}{2}, 1]$ lokal von zweiter Ordnung konvergiert.

b) Bestimmen Sie die Taylor-Verfahren der Ordnungen 1, 2, 3 zur skalaren Dgl

$$y'(t) = \frac{t^2}{1 + y^2} \,.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3.2 (Vergleich der Verfahren von Euler und Runge)

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `[T,Y]=Runge(f,t0,t,y0,N)`, die als Parameter die rechte Seite `f(t,x)` einer Dgl $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die Startzeit `t0`, die Endzeit `t`, den Anfangswert `y0` und die Anzahl `N` der Runge-Schritte verlangt und das äquidistante Zeitgitter `T` sowie die Werte `Y` der Trajektorie des Runge-Verfahrens zurückliefert.

b) Testen Sie Ihr Verfahren an der skalaren Gleichung

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

Plotten Sie die Lösungen für $N = 2^i$, $i = 0, 1, \ldots, 7$ sowie die exakte Lösung in eine Grafik und legen Sie eine Legende an.

c) Ergänzen Sie den Konvergenzplot aus Aufgabe 2.2 um die Konvergenzkurve der Runge-Näherungen aus b). Schätzen Sie aus Ihrem Plot die Konvergenzrate des Runge-Verfahrens.

Anmerkung: In der Literatur wird das Verfahren von Runge oft “Methode von Heun” genannt.

(6 Punkte)