Übung 3

Abgabe bis Donnerstag, 7.11.

Aufgabe 8: [Kondition]

Es sei $x = (x_1, x_2)^T$. Bestimmen sie κ_1^{abs} und κ_1^{rel} für die Funktionen f und überprüfen sie, für welche $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ die Auswertung der Funktion qualitativ gut bzw. schlecht konditioniert ist. Verwenden sie als Norm die Summennorm $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$.

a) $f(x) = \sqrt{x_1 + x_2}, \quad x_1 + x_2 \geq 0$

b) $f(x) = \sqrt{x_1 x_2}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$

Punkte: $\boxed{4/4}$

Aufgabe 9: [Lagrange-Polynome]

Zeigen sie für die Lagrange-Polynome

$$L_i(x) = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$, dass

(a) für $c_i := L_i(0)$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i^j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 0, \\ 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n, \\ (-1)^n x_0 x_1 \ldots x_n & \text{für } j = n + 1. \end{cases}$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$$

Punkte: $\boxed{4/4}$

Aufgabe 10: [Lagrange-Interpolation]

Betrachten sie die Daten

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	2	-1	1

(a) Bestimmen sie das die Daten interpolierende Polynom in der Monombasis.

(b) Bestimmen sie das Interpolationspolynom in der Lagrange-Basis.

Punkte: $\boxed{4/4}$

Bitte wenden

Aufgabe 11: [Programmieraufgabe]

(a) Gegeben sei das Problem $y = Ax$ für $x, y \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Geben sie je ein $a \in \mathbb{R}$ an, für welches das Problem gut und schlecht konditioniert ist. Begründen sie ihre Wahl mit einem in Matlab oder Scilab gerechneten Beispiel (konkreten Vektor x und fehlerbehafteten Vektor $\bar{x}$ wählen).

(b) Schreiben sie eine Funktion *eigenwerte(A)* mit einer 2×2-Matrix A als Inputparameter und einem zweiwertigen Outputvektor, der die Eigenwerte dieser Matrix enthält, indem sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms ermitteln.

(c) Verwenden sie das Programm aus (b), um die Eigenwerte der beiden in (a) gewählten Matrizen zu bestimmen. Begründen sie damit, ob $\left|\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right|$ (größter und kleinster Eigenwert einer Matrix) im allgemeinen ein gutes oder schlechtes Konditionsmaß für symmetrische Matrizen ist.

Punkte: $\boxed{2/4/2}$

Gesamtpunktzahl: 32 Punkte