

## 4. Übungsblatt zur Vorlesung Numerische Methoden für Differentialgleichungen

### Aufgabe 4.1 (Konsistenz und Konvergenzordnung)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

mit glatter rechter Seite  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie die Inkrementfunktionen

$$\Phi_1(t, y, h) = f(t, y) + hf(t + h, y + hf(t, y)),$$

$$\Phi_2(t, y, h) = f\left(t - \frac{h}{2}, y\right),$$

$$\Phi_3(t, y, h) = \frac{2}{3}f(t, y) + \frac{1}{3}f\left(t + h, y + hf(t, y)\right)$$

dreier numerischer Verfahren.

- a) Welche der Verfahren sind konsistent?
- b) Was sind die lokalen Konvergenzordnungen der Verfahren? Zeigen Sie anhand einfacher Gegenbeispiele, dass Sie tatsächlich die bestmöglichen Konvergenzordnungen angeben haben.

(6 Punkte)

### Aufgabe 4.2 (Butcher-Tableau)

Gegeben seien die folgenden Butcher-Tableaus:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array}.$$

- a) Wie lauten die zugehörigen Runge-Kutta-Verfahren?
- b) Zeigen Sie, dass das erste Verfahren lokal von zweiter Ordnung ist.

(3 Punkte)

### Aufgabe 4.3 (einfache Schrittweitensteuerung)

Es sei  $y$  Lösung einer Differentialgleichung und  $w(t, h)$  eine Näherung mit

$$w(t, h) - y(t) = h^p c_p(t) + O(h^{p+1}), \quad p > 0.$$

- a) Wie lässt sich  $w(t, \frac{h}{2}) - y(t)$  durch  $w(t, h)$  und  $w(t, \frac{h}{2})$  ausdrücken?
- b) Wie kann man aus a) eine Schrittweitensteuerung ableiten?

(3 Punkte)