GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Einführung in die Numerik
WS 2013/2014
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 4

Abgabe bis Donnerstag, 14.11.

Aufgabe 12: [Newton-Interpolation]

(a) Aus der folgenden Messtafel ist leider ein Wert verloren gegangen:

x_i	-1	0	1	2	3
y_i	0	2	?	1	3

Werten sie das durch die übrigen Daten definierte Interpolationspolynom an der fehlenden Stelle 1 aus **ohne** das Polynom explizit aufzustellen. Verwenden sie dazu den Aitken-Neville-Algorithmus.

(b) Stellen sie jetzt das Interpolationspolynom mit Hilfe des Newton-Algorithmus auf und werten sie es an der Stelle 1 mit dem Horner-Schema aus.

(c) Verwenden sie nun dividierte Differenzen zur Berechnung der Polynomkoeffizienten.

(d) Im Nachhinein stellt sich heraus, dass der fehlende Wert 2 ist. Ergänzen sie ihr Differenzenschema um den neuen Punkt (ohne es komplett neu aufzustellen) und werten sie das durch alle Punkte gehende Interpolationspolynom an der Stelle 4 aus.

Punkte: 3/3/3/3

Aufgabe 13: [Interpolationsfehler]

Die Funktion $\ln(x)$ werde quadratisch interpoliert. Stützstellen seien $x = 10, 11, 12$.

(a) Schätzen sie den Interpolationsfehler für $x = 11.1$ ab.

(b) Wie hängt das Vorzeichen dieses Fehlers von x ab?

Punkte: 4/2

Aufgabe 14: [lineare Interpolation]

Die auf $I = [-1, 1]$ zweimal stetig differenzierbare Funktion f werde durch ein lineares Polynom an den Stellen $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1$, mit $x_0, x_1 \in I$ interpoliert. Dann ist

$$\alpha = \frac{1}{2} \max_{\xi \in I} |f''(\xi)| \max_{x \in I} |(x - x_0)(x - x_1)|$$

eine obere Schranke für den absoluten Interpolationsfehler auf I. Wie hat man x_0, x_1 zu wählen, damit α möglichst klein wird? Welcher Zusammenhang besteht zwischen $(x - x_0)(x - x_1)$ und $\cos(2 \arccos x)$?

Punkte: 6

Aufgabe 15: [Programmieraufgabe]

Schreiben sie folgende Programme in Scilab oder Matlab:

(a) Das dividierte Differenzenverfahren zur Bestimmung der Polynomkoeffizienten in Newton-Darstellung.

(b) Das Horner-Schema zur Auswertung des Interpolationspolynoms in Newton-Darstellung an einer beliebigen Stelle $\bar{x}$.

Betrachten sie als Beispiel die Sinusfunktion

$$g(x) = \sin(x)$$

im Intervall $[-\pi, \pi]$ mit $n = 1, 3, 5, 9, 17$ und 33 Stützstellen.

(c) Werten sie zur Überprüfung ihrer Programme das Interpolationspolynom für $g(x)$ an der Stelle $\bar{x} = 0.2$ aus.

(d) Plotten sie $|g(\bar{x}) - P(\bar{x})|$ gegen n (Aufwand zu Genauigkeit) in einen gemeinsamen Graphen, wobei sie Punkte für gleiches $\bar{x}$ miteinander verbinden. Verwenden sie für beide Axen eine logarithmische Skala. Bestimmen sie jeweils die Konvergenzrate.

Punkte: 3/3/2/3

Gesamtpunktzahl: 35 Punkte