5. Übungsblatt zur Vorlesung
Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Aufgabe 5.1 (Runge-Kutta-Verfahren unter linearen Transformationen)
Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ glatt, und $y : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0, \tag{$*$}$$

und es sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix.

a) Welche Differentialgleichung löst die Funktion $x(t) := My(t)$?

b) Es sei Φ die Inkrementfunktion eines s-stufigen, möglicherweise impliziten Runge-Kutta-Verfahrens zur Lösung von $(*)$, und sei Ψ die Inkrementfunktion desselben numerischen Verfahrens angewendet auf diejenige Dgl, die von x gelöst wird. Zeigen Sie, dass zwischen Φ und Ψ eine ähnliche Beziehung besteht wie zwischen f und der rechten Seite der Dgl, die x löst.

   Sie dürfen annehmen, dass die Gleichungen, über die die Verfahren Φ und Ψ definiert sind, stets eindeutige Lösungen besitzen.

(6 Punkte)

Aufgabe 5.2 (Eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren)

a) Programmieren Sie eine Funktion

   `[T,Y]=RKF2(f,t0,tend,y0,h0,tol),`

   die als Parameter die rechte Seite `f` der Dgl $(*)$, die Anfangszeit `t0`, die Endzeit `tend`, den Anfangswert `y0`, die Anfangsschrittweite `h0` und die erlaubte Fehlertoleranz `tol` verlangt und das Zeitgitter `T`, die Werte des eingebetteten Runge-Kutta-Verfahrens RKF2 aus der Vorlesung sowie die Anzahl der benötigten Aufrufe der rechten Seite `f` zurückgibt.

   – Verwenden Sie zur Steuerung der Schrittweite entweder die Methode aus Abschnitt 1.4, oder die folgende einfache Strategie: Halbiere h, wenn Fehlerschätzer $>$ `tol`, verdoppele h, wenn Fehlerschätzer $\leq \frac{1}{16}$`tol`.
   – Beachten Sie, dass `T` nun nicht mehr äquidistant ist und die Anzahl der benötigten Aufrufe der rechten Seite vom Verlauf der Schrittweitensteuerung abhängt!
   – Brechen Sie ab, wenn Ihr Algorithmus die Endzeit `tend` erreicht oder überschreitet.

- Achten Sie darauf, die Funktion `f` nicht öfter aufzurufen als unbedingt nötig! Hierzu begrenzen Sie die Anzahl der f-Aufrufe, und sehen Sie einen Fehlausgang vor, wenn `tend` deswegen nicht erreicht wird.

b) Testen Sie Ihr Verfahren, indem Sie es auf die skalare Differentialgleichung

$$y' = y(1-y) \tag{$**$}$$

anwenden. Verwenden Sie die Parameter `t0` $= 0$, `tend` $= 4.3$, `y0` $= 0.1$, `h0` $= 0.2$ und `tol` $=$ `1e-6`.

Plotten Sie Ihre Lösung und beschreiben Sie Ihr Resultat. Ist die Wahl der Schrittweiten plausibel?

(6 Punkte)

Aufgabe 5.3 (Mehrschrittverfahren)

Bestimmen Sie die Parameter c_3, c_1, b_0, b_1, b_2 so, dass die explizite 3-Schritt-Methode

$$c_3 w_{j+3} + c_1 w_{j+1} = h\,[\,b_0 f_j + b_1 f_{j+1} + b_2 f_{j+2}\,]$$

von maximaler Ordnung ist.

(2 Punkte)