



## Übung 7

Abgabe bis Donnerstag, 5.12.

### Aufgabe 21: [Quadraturformeln]

Betrachten sie das Integral

$$I(f) = \int_0^{2\pi} x \cdot \cos(x) dx.$$

- Berechnen sie  $I(f)$  mit der Trapezregel und der Simpsonregel.
- Schätzen sie jeweils den Integrationsfehler ab und vergleichen sie die Abschätzung mit dem wirklichen Fehler.
- Berechnen sie  $I(f)$  mit der Trapezsumme und der Simpsonsumme für  $h = \frac{\pi}{2}$ .
- Schätzen sie auch hier jeweils den Integrationsfehler ab und vergleichen sie die Abschätzung mit dem wirklichen Fehler.

Punkte:

### Aufgabe 22: [Quadratur von Polynomen]

- Zeigen sie, dass die Simpson-Regel für alle Polynome vom Grad 3 exakt ist, d.h. für alle kubischen Polynome  $P$  gilt:

$$\int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{6}P(a) + \frac{2(b-a)}{3}P\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6}P(b).$$

- Wir betrachten nun das Integral eines normierten quartischen Polynoms  $Q$ , d.h.

$$I(f) = \int_a^b Q(x) dx \quad \text{mit} \quad Q(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Zur näherungsweisen Berechnung von  $I$  soll die Simpsonsumme  $S_h$  mit Intervall-Länge  $h$  verwendet werden. Zeigen sie, dass dann für den Integrationsfehler gilt:

$$I(f) - S_h \leq (b-a) \frac{h^4}{120}$$

Punkte:

**Aufgabe 23:** [Programmieraufgabe]

Schreiben sie in Scilab oder Matlab das folgende Programm:

- (a) Ein Verfahren zur Berechnung des Integrals einer gegebenen eindimensionalen Funktion im Intervall  $[a, b]$  mit Hilfe der Simpsonsumme mit Maschenweite  $(b - a)/n$ . Die zu integrierende Funktion sei dabei als eine separate Unteroutine gegeben.

Betrachten Sie die drei Integrale

$$I_1(f) = \int_{-1}^1 \sqrt{|x|} dx, \quad I_2(f) = \int_0^\pi x^2 \sin(x) dx, \quad I_3(f) = \int_1^3 \exp(3x) dx.$$

- (b) Berechnen sie  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  numerisch mit dem Programm aus Aufgabenteil (a) für  $n = 1, 2, 4, 8, 16$ . Geben sie jeweils die Zahl der Funktionsauswertungen, den berechneten Integralwert und den Integrationsfehler aus.
- (c) Plotten sie die Anzahl benötigter Funktionsauswertungen gegen den Integrationsfehler in drei Plots (für  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$ ). Verwenden sie eine doppelt logarithmische Skala und interpretieren sie ihre Ergebnisse.

Punkte: 

4/3/3
-------

**Gesamtpunktzahl: 30 Punkte**