



Übung 8

Abgabe bis Donnerstag, 12.12.

Aufgabe 24: [Euler–MacLaurin Darstellung]

Betrachten Sie das Integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

einer Funktion $f \in C^{2r}$ mit $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b)$ für $0 \leq i \leq l$.

- Geben Sie den Fehler der Trapezsumme $T(h)$ in Abhängigkeit von r und l an.
- Wie groß ist hier jeweils die Konvergenzordnung (in h)?
- Angenommen, f sei beliebig oft differenzierbar ($r = \infty$) und periodisch ($l = \infty$). Kann man dann mit einer Trapezsumme das Integral $I(f)$ exakt berechnen?

Punkte:

Aufgabe 25: [Romberg–Verfahren]

- Berechnen Sie

$$I(f) = \int_0^1 x^5 dx$$

mit Hilfe des Romberg–Verfahrens

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{(h_{i-k}/h_i)^2 - 1}$$

für die Schrittweiten $h_0 = 1$, $h_1 = 1/2$ und $h_2 = 1/4$.

- Wie groß ist in diesem Fällen der numerische Integrationsfehler?
- Geben Sie die Integrationsformeln T_{21} und T_{22} an. Zeigen Sie, dass T_{22} der Milne–Regel entspricht.
- Zeigen Sie, daß die Formel T_{11} für die Schrittweiten $h_0 = 1$ und $h_1 = 1/3$ gerade die 3/8–Regel ergibt.

Punkte:

Aufgabe 26: [Programmieraufgabe]

- (a) Schreiben Sie in Matlab oder Scilab eine Funktion $Romberg(f,a,b,m)$, welche das Integral einer gegebenen eindimensionalen Funktion f im Intervall $[a, b]$ mit Hilfe der Romberg-Integration unter Verwendung der Simpsonsumme mit Maschenweite $(b - a)/2^n$, $n = 1, \dots, m$ berechnet. Die zu integrierende Funktion sei dabei als eine separate Unterroutine gegeben.

Betrachten Sie die drei Integrale

$$I_1(f) = \int_{-1}^1 \sqrt{|x|} dx, \quad I_2(f) = \int_0^\pi x^2 \sin(x) dx, \quad I_3(f) = \int_1^3 \exp(3x) dx.$$

- (b) Berechnen sie I_1 , I_2 und I_3 numerisch mit dem Programm aus Aufgabenteil (a) für $m = 2, 3, 4, 5$. Geben sie jeweils die Zahl der Funktionsauswertungen, den berechneten Integralwert und den Integrationsfehler aus.
- (c) Plotten sie die Anzahl benötigter Funktionsauswertungen gegen den Integrationsfehler in drei Plots (für I_1 , I_2 und I_3). Verwenden sie eine doppelt logarithmische Skala und interpretieren sie ihre Ergebnisse auch in Bezug zu Aufgabe 23.

Hinweis: bereits bestehende Funktionen aus Aufgabe 23 dürfen erneut verwendet werden!

Punkte:

6/2/2
