Einführung in die Numerik
WS 2013/2014
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 9

Abgabe bis Donnerstag, 19.12.

Aufgabe 27: [Vektornorm]
Zeigen sie folgende Aussagen über die p-Norm $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{und} \qquad \|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \le i \le n\}.$$

a) Die p-Norm ist eine Vektornorm.

b) Die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ sind äquivalent zueinander.

Punkte: 3/3

Aufgabe 28: [Matrixnorm]
Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm und sei $\|\cdot\|_M : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ die zugehörige Operatornorm:

$$\|B\|_M = \sup_{\|x\|\le 1} \|Bx\|.$$

a) Zeigen sie: Es gilt $\|B\|_M = \max_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$.

b) Zeigen sie: Die Operatornorm $\|\cdot\|_M$ ist submultiplikativ, das heißt $\|A\cdot B\|_M \le \|A\|_M \cdot \|B\|_M$.

c) Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ gelte:

$$A\cdot(1,1,0,2)^T = (0,1,7,4)^T, \quad A\cdot(3,4,0,1)^T = (5,4,5,0)^T.$$

Zeigen sie: $\kappa_\infty(A) \ge 2,8$. (Hier ist also die von der Maximumnorm induzierte Matrixnorm zu verwenden.)

Punkte: 3/2/3

Aufgabe 29: [Frobenius-Norm]
Zeigen sie folgende Aussagen über die Frobeniusnorm $\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ mit

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2}.$$

(a) $\|A\|_F = \sqrt{\text{Spur}(A^TA)}$.

(b) Die Frobeniusnorm $\|\cdot\|_F$ ist eine Matrixnorm.

(c) $\|AU\|_F = \|A\|_F$ für $U^TU = UU^T = E$.

Punkte: 2/4/2

Aufgabe 30: [Programmieraufgabe]
Schreiben Sie in Scilab oder Matlab eine Funktion *Matrixmultiplikation(A,B)*, die das Produkt $A\cdot B$ zweier Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ bestimmt. Die vordefinierte Matrixmultiplikation in Scilab/Matlab darf dabei nicht verwendet werden. Testen Sie ihre Funktion danach mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Punkte: 6

Gesamtpunktzahl: 28 Punkte