10. Übungsblatt zur Vorlesung
Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Aufgabe 10.1 (Gegenschießen)

Gegeben sei das Randwertproblem $y' = f(t,y)$ mit *separierten* Randbedingungen

$$\begin{pmatrix} y_1(a)-\alpha_1 \\ \vdots \\ y_k(a)-\alpha_k \\ y_{k+1}(b)-\beta_{k+1} \\ \vdots \\ y_n(b)-\beta_n \end{pmatrix} = 0\,.$$

Es sind also k Anfangswerte und $n-k$ Endwerte bekannt. Damit lässt sich die Dimension des Mehrziel-Gleichungssystems reduzieren.
Stellen Sie für 3 Stellen $t_1 = a$, $t_2 \in (a,b)$ und $t_3 = b$ das Gleichungssystem auf. Dabei soll von t_1 nach t_2 integriert werden und "rückwärts" von t_3 nach t_2. Wie sieht die Jacobi-Matrix aus?

(5 Punkte)

Aufgabe 10.2 (Diskretisierung 4. Ordnung)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$y'' = f(y)\,, \quad y(0) = a\,,\ y(1) = b\,.$$

Gesucht sind Näherungswerte w_i für die exakten Werte $y(t_i)$, $i = 1,\ldots,n-1$, wobei $t_i = ih$ und $h = \frac{1}{n}$.
Ersetzt man $y''(t_i)$ durch den Differenzenquotienten $\frac{w_{i-1}-2w_i+w_{i+1}}{h^2}$ und $f(y(t_i))$ durch $\alpha f(w_{i-1}) + \beta f(w_i) + \gamma f(w_{i+1})$ für $i = 1,\ldots,n-1$, und setzt man $w_0 = a$ und $w_n = b$, so erhält man aus der Differentialgleichung ein nichtlineares Gleichungssystem für den Vektor der $w_1,\ldots,w_{n-1}$.
Bestimmen Sie α, β, γ derart, dass gilt

$$\frac{w_{i-1}-2w_i+w_{i+1}}{h^2} = \alpha f(w_{i-1}) + \beta f(w_i) + \gamma f(w_{i+1}) + O(h^4)\,.$$

(7 Punkte)