

Übung 10

Abgabe bis Donnerstag, 16.1.

Aufgabe 31: [LR-Zerlegung]

- Zeigen sie, dass das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix, und ebenso die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.
- Zeigen sie, dass die LR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eindeutig ist, wenn man fordert, dass L nur Einsen auf der Diagonalen besitzt.
- Berechnen sie die LR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & -9 & 6 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

und geben sie dabei alle Zwischenschritte an.

- Bestimmen sie die Anzahl arithmetischen Operationen, die höchstens benötigt werden, um die LR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ zu bestimmen, sofern diese existiert.

Punkte: 3/4/4/3

Aufgabe 32: [QR-Zerlegung]

- Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung der invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist. Zeigen Sie, dass die QR-Zerlegung dann eindeutig ist.
- Berechnen sie mit Hilfe von ebenen Rotationen die QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

und geben sie dabei alle Zwischenschritte an. Überprüfen sie am Ende, ob Q eine orthogonale Matrix ist.

- Bestimmen sie die Anzahl der arithmetischen Operationen, die höchstens benötigt werden, um die QR-Zerlegung mittels ebener Rotationen einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \geq n$ zu bestimmen.

Punkte: 4/5/3

Aufgabe 33: [Programmieraufgabe]

Schreiben sie eine Scilab- oder Matlabfunktion, die als Eingabewert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $m \geq n$ besitzt und die QR-Zerlegung von A mit Hilfe von Givens-Rotationen berechnet und ausgibt.

Wenden sie ihr Programm auf die Matrix aus Aufgabe 32 an und vergleichen sie die Ausgabe mit der QR-Zerlegung, die Scilab/Matlab ($qr(A)$) berechnet.

Punkte: 8

Gesamtpunktzahl: 34 Punkte