GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Einführung in die Numerik
WS 2013/2014
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 11

Abgabe bis Donnerstag, 23.1.

Aufgabe 34: [LR-Zerlegung]

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Matrix der Bauart

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & \ddots & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix} =: \mathrm{tridiag}(b_\mu, a_\mu, c_\mu)$$

und sei diese Matrix irreduzibel diagonaldominant, d.h.:

$$|a_1| > |c_1| > 0,\ |a_n| \geq |b_n| > 0,$$
$$|a_\mu| \geq |b_\mu| + |c_\mu|\,,\ b_\mu \neq 0,\ c_\mu \neq 0,\ 2 \leq \mu \leq n-1.$$

Definiere damit:

$$\alpha_1 := a_1,\ \gamma_1 := c_1\alpha_1^{-1},\ \alpha_\mu := a_\mu - b_\mu\gamma_{\mu-1},\ 2 \leq \mu \leq n,\ \gamma_\mu := c_\mu\alpha_\mu^{-1},\ 2 \leq \mu \leq n-1.$$

a) Zeigen sie: $|\gamma_\mu| < 1,\ 1 \leq \mu \leq n-1$; und $0 < |a_\mu| - |b_\mu| < |\alpha_\mu| + |b_\mu|\,,\ 2 \leq \mu \leq n-1$.

b) Zeigen sie, dass A eine Dreieckszerlegung $A = LR$ mit
$$L = \mathrm{tridiag}(b_\mu, \alpha_\mu, 0),\ R = \mathrm{tridiag}(0, 1, \gamma_\mu)$$
besitzt.

c) Zeigen sie, dass A invertierbar ist.

Punkte: $\boxed{4/3/3}$

Aufgabe 35: [QR-Zerlegung]

Betrachten sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Berechnen sie mit Hilfe von Householder-Spiegelungen die QR-Zerlegung von A und geben sie dabei alle Zwischenschritte an.

b) Schreiben sie eine Scilab- oder Matlabfunktion, die als Eingabewert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $m \geq n$ besitzt und die QR-Zerlegung von A mit Hilfe von Householder-Spiegelungen berechnet und ausgibt.
Wenden sie ihr Programm auf die Matrix A an

Punkte: $\boxed{4/6}$

Aufgabe 36: [Kondition]

Betrachten sie

$$A := \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix},\ y := \begin{pmatrix} 0.8642 \\ 0.1440 \end{pmatrix},\ \bar{x} := \begin{pmatrix} 0.9911 \\ -0.4870 \end{pmatrix},$$

wobei $\bar{x}$ eine Näherungslösung von $Ax = y$ sei.

a) Berechnen sie die exakte Lösung von $Ax = y$ und den Defekt $r := A\bar{x} - y$. Ist $\bar{x}$ akzeptabel?

b) Berechnen sie die Inverse von A und die Konditionszahl $\kappa(A)$ bezüglich der 1-Norm.

c) Interpretieren sie $\bar{x}$ als eine exakte Löung von $Ax = y + r$ und schätzen sie den relativen Fehler von $\bar{x}$ mit Hilfe der Abschätzung aus dem Skript bezüglich der 1-Norm. Vergleichen sie sie mit dem tatsächlichen relativen Fehler.

Punkte: $\boxed{3/4/3}$

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte