Einführung in die Numerik
WS 2013/2014
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 12

Abgabe bis Donnerstag, 30.1.

Aufgabe 37: [Cholesky-Zerlegung]

a) Zeigen sie, dass alle Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ in der Vereinigung der sogenannten Gerschgorin-Kreise

$$K_i := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}, \ i = 1, \dots, n$$

liegen. (*Hinweis:* Betrachten sie zu gegebenem Eigenwert λ einen Eigenvektor x mit normierter maximaler Komponente $|x_i| = 1$.)

b) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische und strikt diagonaldominante Matrix mit positiven Diagonaleinträgen, d.h. $a_{ii} > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Zeigen sie, dass A positiv definit ist.

c) Untersuchen sie, für welche der Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Cholesky-Zerlegung existiert und geben sie diese, falls vorhanden, zusammen mit der Determinante an.

Punkte: $\boxed{4/3/5}$

Aufgabe 38: [Lineare Ausgleichsrechnung]

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Zeigen sie: $\nabla F(x) = A^T(Ax - b)$.

b) Warum ist die Lösung der Gleichung $A^T Ax = A^T b$ äquivalent zu einer Minimierung der Funktion $F(x)$?

c) Zu den Messwerten

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	0	1	2

soll ein Polynom der Form $y(x) = a+bx+cx^2$ so gelegt werden, dass die Abweichung $\sum_{i=1}^{4}(y(x_i)-y_i)^2$ minimal wird. Bestimmen sie dafür die optimalen Parameter a, b und c unter Verwendung der Normalengleichungen.

Punkte: $\boxed{3/3/4}$

Aufgabe 39: [Programmieraufgabe]

Schreiben sie zwei Scilab- oder Matlabfunktion.
Die erste Funktion *lrzerlegung* besitzt als Eingabewert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und soll eine Permutationsmatrix P, eine untere Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonalen und eine obere Dreiecksmatrix R ausgeben, so dass $PA = LR$. Die Permutationsmatrix soll mittels Spaltenpivotsuche erstellt werden und sicherstellen, dass die Pivot-Elemente ungleich Null sind.
Die zweite Funktion *substitution* besitzt als Eingabewert die Matrizen L, R, P und den Vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Sie soll mit Hilfe von Vorwärts- und Rückwärtssubstitution das Gleichungssystem $Ax = b$ lösen.
Wenden sie die beiden Funktionen an, um das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu lösen.

Punkte: $\boxed{10}$

Gesamtpunktzahl: 32 Punkte