

Skript zur Vorlesung

Algebraische Geometrie II

**Wintersemester 2013/2014
Frankfurt am Main**

Prof. Dr. Annette Werner

Inhaltsverzeichnis

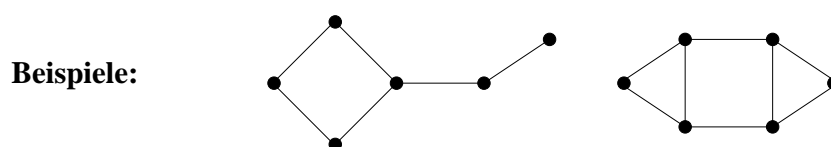
1	Einführung	1
2	Kategorientheorie	7
3	Garbenkohomologie	31
4	Quasikohärente Modulgarben	37
5	Čech-Kohomologie	49
6	Divisoren und Geradenbündel	54

1 Einführung

Wir wollen in dieser Vorlesung die Kohomologie abelscher Garben auf Schemata studieren. Dazu werden wir einen technischen Apparat entwickeln, der auch auf andere Gebiete angewandt werden kann. Wir geben zunächst einige natürliche Beispiele für Kohomologiegruppen.

Beispiel 1.1 (Homologie von Graphen)

Es sei G ein **Graph**, d.h. $G = (V, E)$ mit einer Eckenmenge V und einer Kantenmenge E , die aus zweielementigen Teilmengen $\{v, w\}$ von V besteht. Man kann die Elemente $v \in V$ als Punkte und die Kanten $\{v, w\}$ als Verbindungsstrecke zwischen v und w zeichnen:



Ein Graph heißt **orientiert**, wenn man für jede Kante e eine Anfangsecke $o(e)$ („origin“) und eine Endecke $t(e)$ („terminus“) festlegt. Graphisch kann man dies durch Einzeichnen von Pfeilspitzen auf den Kanten darstellen.

Es sei G ein zusammenhängender Graph, d.h. je zwei Ecken in G lassen sich durch einen Kantenzug verbinden. Wir wählen auf G eine beliebige Orientierung. Jede Kante e in E hat dann eine Anfangsecke $o(e)$ und eine Endecke $t(e)$. Wir nehmen außerdem an, dass V und E endliche Mengen sind.

Wir definieren zwei \mathbb{C} -Vektorräume

$$C^0(G, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{v \in V} \mathbb{C}$$

und

$$C^1(G, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{e \in E} \mathbb{C}.$$

Außerdem definieren wir eine Abbildung

$$d : C^1(G, \mathbb{C}) \rightarrow C^0(G, \mathbb{C}),$$

indem wir das Tupel $(a_e)_{e \in E}$ mit $a_e \in \mathbb{C}$ auf das Tupel $(b_v)_{v \in V}$ mit

$$b_v = \sum_{t(e)=v} a_e - \sum_{o(e)=v} a_e$$

abbilden. Das können wir auch folgendermaßen formulieren. Ist $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ die Menge der Ecken von G und $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ die Menge der Kanten von G ,

dann ist $C^0(G, \mathbb{C}) = \bigoplus_{v \in V} \mathbb{C} = \mathbb{C}^n$

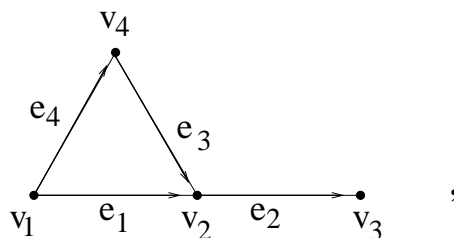
und $C^1(G, \mathbb{C}) = \bigoplus_{e \in E} \mathbb{C} = \mathbb{C}^m$.

Es sei $D = (d_{ij})_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots m}}$ die $n \times m$ -Matrix mit den Einträgen

$$d_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{falls } v_i = o(e_j) \\ 1, & \text{falls } v_i = t(e_j) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $d : C^1(G, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n = C^0(G, \mathbb{C})$ die Abbildung, die durch Multiplikation mit der Matrix D gegeben wird.

Beispiel: Ist G der orientierte Graph



so ist

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten den folgenden Komplex

$$0 \rightarrow C^1(G, \mathbb{C}) \xrightarrow{d} C^0(G, \mathbb{C}) \rightarrow 0.$$

Ein Komplex ist eine Kette von Abbildungen, so dass jeweils die Verknüpfung von zwei aufeinander folgenden Abbildungen trivial ist. Das ist im vorliegenden Fall

keine interessante Aussage, wohl aber bei höherdimensionalen Simplizialkomplexen.

Der Komplex ist nicht exakt. Die Abweichung von der Exaktheit wird durch die sogenannten Homologiegruppen gemessen. Wir definieren:

$$H^1(G, \mathbb{C}) = \text{Kern } d \text{ und } H^0(G, \mathbb{C}) = C^0(G, \mathbb{C})/\text{Bild } d.$$

Nach der Dimensionsformel gilt

$$m = \dim_{\mathbb{C}} C^1(G, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Kern } d + \dim_{\mathbb{C}} \text{Bild } d.$$

Ferner gilt $\dim_{\mathbb{C}} \text{Bild } d = \text{rang } (D)$. Die Spalten von D entsprechen den Kanten von G . In jeder Spalte von D steht genau eine 1 (nämlich dann, wenn die Ecke mit der entsprechenden Zeilennummer die Endecke ist) und eine -1 (dann, wenn die zugehörige Ecke die Anfangsecke ist). Also ist die Summe über die Zeilen von D der Nullvektor. Daher ist der Zeilenrang von D höchstens $n - 1$. Angenommen, die Zeilen z_1, \dots, z_n von D genügen der linearen Relation

$$\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n = 0$$

für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. D hat genau dann in Position (i, j) einen Eintrag $\neq 0$, falls v_i eine Ecke von e_j ist. In der Spalte j steht aber nur ein weiterer Eintrag $\neq 0$, nämlich gerade an Position (k, j) , wobei v_k die andere Ecke von e_j ist. Einer der Einträge der Spalte j ist 1, der andere -1 . Also folgt: $\alpha_i = \alpha_k$. Dasselbe Verfahren wiederholen wir mit der k -ten Zeile. Da G zusammenhängend ist, folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$. Daraus schließen wir $\dim_{\mathbb{C}} \text{Bild } d = \text{rang } (D) = n - 1$. Somit folgt:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} H^0(G, \mathbb{C}) &= \dim_{\mathbb{C}} C^0(G, \mathbb{C}) - \dim_{\mathbb{C}} \text{Bild } d \\ &= n - (n - 1) = 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} H^1(G, \mathbb{C}) &= \dim_{\mathbb{C}} \text{ker } d \\ &= \dim_{\mathbb{C}} C^1(G, \mathbb{C}) - \dim_{\mathbb{C}} \text{Bild } d \\ &= m - (n - 1) = m - n + 1. \end{aligned}$$

Die Zahl $\dim_{\mathbb{C}} H^1(G, \mathbb{C})$ ist das sogenannte Geschlecht des Graphen. Dieses hängt nicht von der gewählten Orientierung ab. Anschaulich ist das Geschlecht die Anzahl der „Löcher“ in G . Genauer gesagt, gilt folgende Tatsache, die man mit Linearer Algebra beweisen kann:

Ein geschlossener Kantenzug $C = (e_1, \dots, e_r)$ in G ist eine Folge von Kanten, so dass e_1 benachbart zu e_2 , e_2 benachbart zu e_3, \dots, e_{r-1} benachbart zu e_r und e_r benachbart zu e_1 ist. Ferner nehmen wir an, dass keine Kante doppelt in C auftritt.

Jeder geschlossene Kantenzug C in G definiert folgendermaßen ein Element $h_C = (h_C(e))_{e \in E}$ in $C^1(G, \mathbb{C}) = \bigoplus_{e \in E} \mathbb{C}$. Wir definieren

$$h_C(e) = \begin{cases} 1, & \text{falls } e = e_i \text{ und } t(e_i) \text{ eine Ecke von } e_{i+1} \text{ ist.} \\ -1, & \text{falls } e = e_i \text{ und } o(e_i) \text{ eine Ecke von } e_{i+1} \text{ ist.} \\ 0, & \text{falls } e \neq e_i \text{ für } i = 1, \dots, r \text{ ist.} \end{cases}$$

Hier setzen wir $e_{i+1} = e_1$, falls $i = r$ ist. Dann gilt

Satz 1.1 *Der Vektorraum Kern d wird von allen Elementen h_C für geschlossene Kantenzüge $C \subset G$ erzeugt.*

Beispiel 1.2 (Garbenkohomologie)

Wir betrachten den topologischen Raum $T = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die Garben \mathcal{O}_T sowie \mathcal{O}_T^\times auf T , die folgendermaßen definiert sind:

Für alle $U \subset T$ offen ist

$$\mathcal{O}_T(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\}$$

und

$$\mathcal{O}_T^\times(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ holomorph}\}$$

mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_T(U) &\rightarrow \mathcal{O}_T^\times(U) \\ f &\mapsto \exp(2\pi i f), \end{aligned}$$

wobei \exp die komplexe Exponentialfunktion ist, vermittelt einen Garbenmorphismus

$$\exp(2\pi i) : \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{O}_T^\times.$$

Offenbar ist der Kern von

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_T(U) &\rightarrow \mathcal{O}_T^\times(U) \\ f &\mapsto \exp(2\pi i f) \end{aligned}$$

gerade die Untergruppe aller holomorphen Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{Z}$, d.h. also die Untergruppe aller lokalkonstanten Funktionen mit Werten in \mathbb{Z} . Daher ist die Garbe

$\text{Ker}(\exp(2\pi i))$ gerade die konstante Garbe \mathbb{Z}_T .

Wir brauchen folgende Tatsache aus der komplexen Analysis: Ist $U \subset \mathbb{C}$ eine einfach zusammenhängende offene Teilmenge, so existiert für jede holomorphe, nicht-verschwindende Funktion g auf U eine holomorphe Funktion f auf U mit $\exp(f) = g$. Beispiele für offene, einfach zusammenhängende Teilmengen sind etwa offene Sternmengen U , in denen es einen Punkt p gibt, so dass die Verbindungsstrecke von p zu jedem Punkt $x \in U$ ganz in U liegt.

Aus dieser Tatsache folgt sofort: Der Garbenmorphismus

$$\exp(2\pi i) : \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{O}_T^\times$$

ist surjektiv, denn er ist surjektiv auf einer geeigneten offenen Überdeckung jeder offenen Teilmenge. Also ist die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_T \rightarrow \mathcal{O}_T \xrightarrow{\exp(2\pi i)} \mathcal{O}_T^\times \rightarrow 0$$

von Garben abelscher Gruppen auf T exakt. Insbesondere ist

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_T(T) \rightarrow \mathcal{O}_T^\times(T)$$

exakt, aber die letzte Abbildung ist nicht surjektiv. Das sieht man so: Wäre sie surjektiv, dann existierte eine holomorphe Funktion f auf $T = \mathbb{C}^\times$ mit $e^{2\pi i f(z)} = z$, woraus nach Ableiten $\frac{1}{z} = 2\pi i f'(z)$ folgte. Die Funktion $\frac{1}{z}$ hätte also eine Stammfunktion auf T , was der Tatsache widerspricht, dass die Umlaufzahl

$$\int_{K_1(0)} \frac{1}{z} = 2\pi i$$

ist. (Hier ist $K_1(0)$ die Kreislinie vom Radius 1 um 0.)

Was ist also das Bild von

$$\exp(2\pi i) : \mathcal{O}_T(T) \rightarrow \mathcal{O}_T^\times(T) \quad ?$$

Wir benutzen die beiden offenen Sternmengen

$$T_1 = \mathbb{C} \setminus [0, \infty[= \{z \in \mathbb{C} : \text{falls } z \in \mathbb{R}, \text{ so ist } z < 0\},$$

$$\text{und } T_2 = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] = \{z \in \mathbb{C} : \text{falls } z \in \mathbb{R}, \text{ so ist } z > 0\}$$

Dann gilt

$$T = T_1 \cup T_2.$$

Sei $g : T \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine beliebige holomorphe Funktion. Da T_1 und T_2 offene Sternmengen sind, existiert ein $f_1 \in \mathcal{O}_T(T_1)$ mit $\exp(2\pi i f_1) = g|_{T_1}$ sowie ein $f_2 \in \mathcal{O}_T(T_2)$ mit $\exp(2\pi i f_2) = g|_{T_2}$.

Ferner ist $T_1 \cap T_2 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_-$

mit $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ und

$\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\}$.

Auf $T_1 \cap T_2$ gilt

$$\exp(2\pi i f_1|_{T_1 \cap T_2}) = g|_{T_1 \cap T_2} = \exp(2\pi i f_2|_{T_1 \cap T_2}),$$

also ist $f_1|_{T_1 \cap T_2} - f_2|_{T_1 \cap T_2} \in \mathbb{Z}_T(T_1 \cap T_2)$. Nun ist $\mathbb{Z}_T(T_1 \cap T_2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, wobei die erste Komponente den Wert auf \mathbb{H}_+ und die zweite Komponente den Wert auf \mathbb{H}_- angibt.

Daher gibt es $(a_+, a_-) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ mit

$$(f_1 - f_2)|_{\mathbb{H}_+} = a_+$$

$$\text{und } (f_1 - f_2)|_{\mathbb{H}_-} = a_-.$$

Wählen wir andere $f'_1 \in \mathcal{O}_T(T_1)$ und $f'_2 \in \mathcal{O}_T(T_2)$ mit $\exp(2\pi i f'_1) = g|_{T_1}$ und $\exp(2\pi i f'_2) = g|_{T_2}$, so ist $f_1 - f'_1 \in \mathbb{Z}_T(T_1) = \mathbb{Z}$ und $f_2 - f'_2 \in \mathbb{Z}_T(T_2) = \mathbb{Z}$. Sind $b, c \in \mathbb{Z}$ mit $f_1 - f'_1 = b$ und $f_2 - f'_2 = c$, so gilt

$$(f_1 - f_2)|_{\mathbb{H}_+} = (f'_1 - f'_2)|_{\mathbb{H}_+} + (b - c)$$

und

$$(f_1 - f_2)|_{\mathbb{H}_-} = (f'_1 - f'_2)|_{\mathbb{H}_-} + (b - c).$$

Wir definieren nun

$$H^1(T, \mathbb{Z}_T) := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \{(a, a) : a \in \mathbb{Z}\}$$

als Quotient der abelschen Gruppe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nach der diagonal eingebetteten Untergruppe \mathbb{Z} . Ferner definieren wir einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{O}_T^\times(T) &\rightarrow H^1(T, \mathbb{Z}_T) \\ g &\mapsto (f_1 - f_2|_{\mathbb{H}_+}, f_1 - f_2|_{\mathbb{H}_-}), \end{aligned}$$

wobei $f_1 \in \mathcal{O}_T(T_1)$ und $f_2 \in \mathcal{O}_T(T_2)$ beliebige Elemente mit

$$\exp(2\pi i f_1) = g|_{T_1} \text{ und } \exp(2\pi i f_2) = g|_{T_2}$$

sind.

Wir haben oben nachgerechnet, dass das Ergebnis nicht von der Wahl von (f_1, f_2) abhängt.

Die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_T(T) \xrightarrow{\exp(2\pi i)} \mathcal{O}_T^\times(T) \xrightarrow{\delta} H^1(T, \mathbb{Z}_T)$$

ist exakt, denn $g \in \mathcal{O}_T^\times(T)$ liegt genau dann im Kern von δ , wenn

$$f_1 - f_2|_{\mathbb{H}_+} = 0 \text{ und } f_1 - f_2|_{\mathbb{H}_-} = 0 \text{ ist.}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $f_1|_{T_1 \cap T_2} = f_2|_{T_1 \cap T_2}$ ist, wenn es also ein $f \in \mathcal{O}_T(T)$ mit $f|_{T_1} = f_1$ und $f|_{T_2} = f_2$ gibt. Ein solches f erfüllt

$$\begin{aligned} \exp(2\pi i f|_{T_1}) &= g|_{T_1} \text{ und} \\ \exp(2\pi i f|_{T_2}) &= g|_{T_2}, \end{aligned}$$

also auch $\exp(2\pi i f) = g$.

$H^1(T, \mathbb{Z}_T)$ ist ein Beispiel für eine Kohomologiegruppe abelscher Garben, wie wir sie später definieren werden. Die obige Sequenz ist ein Beispiel einer „langen exakten Kohomologiesequenz“ zu einer kurzen exakten Sequenz von Garben.

2 Kategorientheorie

Definition 2.1 Eine *Kategorie* \mathfrak{a} besteht aus einer Klasse von Objekten $\mathfrak{Ob}(\mathfrak{a})$, sowie für je zwei Objekte A, B aus einer Menge $\text{Hom}(A, B)$ der Morphismen von A nach B , so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) Sind A, B, C Objekte von \mathfrak{a} , so existiert eine Verknüpfungsabbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) &\rightarrow \text{Hom}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

ii) $\text{Hom}(A, B)$ und $\text{Hom}(A', B')$ sind disjunkt, außer wenn $A = A'$ und $B = B'$ gilt.

iii) Für jedes Objekt A in \mathfrak{a} existiert ein Element $id_A \in \text{Hom}(A, A)$ so dass für alle Objekte B und alle $f \in \text{Hom}(A, B)$ die Regel $f \circ id_A = f$ und für alle $g \in \text{Hom}(B, A)$ die Regel $id_A \circ g = g$ gilt.

iv) Für $f \in \text{Hom}(A, B)$, $g \in \text{Hom}(B, C)$ und $h \in \text{Hom}(C, D)$ gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Ist $\mathfrak{Ob}(\mathfrak{a})$ sogar eine Menge, so heißt \mathfrak{a} **kleine Kategorie**.

Beispiele

- 1) Die Kategorie \mathfrak{Sets} der Mengen mit den mengentheoretischen Abbildungen.
- 2) Die Kategorie \mathfrak{Top} der topologischen Räume zusammen mit den stetigen Abbildungen.
- 3) Die Kategorie \mathfrak{Groups} der Gruppen mit Gruppenhomomorphismen.
- 4) Die Kategorie \mathfrak{Ab} der abelschen Gruppen zusammen mit Gruppenhomomorphismen.
- 5) Für jeden kommutativen Ring A existiert die Kategorie \mathfrak{Mod}_A der A -Moduln mit Modulhomomorphismen.
- 6) Auch die Homomorphismen $f : G \rightarrow H$ abelscher Gruppen bilden die Objekte einer Kategorie. Ein Morphismus von $f : G \rightarrow H$ nach $f' : G' \rightarrow H'$ wird dabei durch ein Paar (g, h) von Gruppenhomomorphismen $g : G \rightarrow G'$ und $h : H \rightarrow H'$ gegeben, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ G' & \xrightarrow{f'} & H' \end{array}$$

kommutiert.

Definition 2.2 Eine Kategorie \mathfrak{b} ist eine **Unterkategorie** der Kategorie \mathfrak{a} , falls gilt:

- i) Jedes Objekt aus \mathfrak{b} ist auch Objekt in \mathfrak{a} .
 - ii) Jeder Morphismus in \mathfrak{b} ist auch Morphismus in \mathfrak{a} .
 - iii) Die Verknüpfung von Morphismen in \mathfrak{b} stimmt mit der Verknüpfung von Morphismen in \mathfrak{a} überein.
 - iv) Für alle Objekte B in \mathfrak{b} ist id_B auch die identische Abbildung in \mathfrak{a} .
-

Gilt zusätzlich für alle Objekte A, B aus \mathfrak{b}

$$\text{Hom}_{\mathfrak{b}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathfrak{a}}(A, B),$$

so heisst \mathfrak{b} volle Unterkategorie von \mathfrak{a} .

Beispiele:

- 1) \mathfrak{Top} ist eine Unterkategorie von \mathfrak{Sets} .
- 2) \mathfrak{Ab} ist eine volle Unterkategorie von \mathfrak{Groups} .

Definition 2.3 Eine *abelsche Kategorie* ist eine Kategorie \mathfrak{a} , so dass für alle Objekte A, B in \mathfrak{a} die Menge $\text{Hom}(A, B)$ eine abelsche Gruppe ist, die folgenden Bedingungen genügt:

- i) Die Verknüpfung $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \xrightarrow{\circ} \text{Hom}(A, C)$ ist bilinear.
- ii) Es gibt ein Objekt 0 in \mathfrak{a} , so dass für alle Objekte A in \mathfrak{a} die Gruppen $\text{Hom}(A, 0)$ und $\text{Hom}(0, A)$ nur aus einem Element bestehen. Dieses bezeichnen wir ebenfalls mit 0 .
- iii) In \mathfrak{a} existieren endliche Produkte und Koproducte.
- iv) Jeder Morphismus $f : A \rightarrow B$ in \mathfrak{a} hat einen Kern, d. h. es gibt einen Morphismus $\text{Kern } f : C \rightarrow A$, so dass für alle Objekte X in \mathfrak{a} die Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(X, C) \rightarrow \text{Hom}(X, A) \rightarrow \text{Hom}(X, B)$$

exakt ist.

- v) Jeder Morphismus $f : A \rightarrow B$ hat einen Kokern, d. h. es gibt einen Morphismus $\text{Kokern } f : B \rightarrow C$, so dass für alle Objekte X in \mathfrak{a} die Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, X) \rightarrow \text{Hom}(B, X) \rightarrow \text{Hom}(A, X)$$

exakt ist.

- vi) Ist der Kern von $f : A \rightarrow B$ gleich 0 , so ist f der Kern seines Kokerns. Ist der Kokern von $f : A \rightarrow B$ gleich 0 , so ist f der Kokern seines Kerns.

Gelten nur die Bedingungen i) - iii) aus Definition 2.3, so heisst \mathfrak{a} **additive Kategorie**.

Der Prototyp einer abelschen Kategorie ist die Kategorie der abelschen Gruppen \mathfrak{Ab} . Ist $f : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus abelscher Gruppen, dann ist die Inklusion

$i : \text{Kern } f \hookrightarrow G$ nämlich der Kern von f im Sinne von Definition 2.3. Ferner ist der surjektive Homomorphismus $\rho : H \rightarrow H/G$ der Kokern von f im Sinne von Definition 2.3.

Wieso definiert man Kern und Kokern so kompliziert wie in Definition 2.3 ? Das ist erforderlich, damit man diese Definition auch auf Kategorien anwenden kann, deren Objekte komplizierter sind, etwa auf Kategorien von Garben.

Beispiele

- 1) Die Kategorie $\mathfrak{S}ets$ der Mengen ist keine abelsche Kategorie, ebensowenig die Kategorie $\mathfrak{T}op$.
- 2) Die Kategorie $\mathfrak{M}od_A$ der Moduln über einem kommutativen Ring A ist eine abelsche Kategorie. Insbesondere ist also die Kategorie der Vektorräume über einem beliebigen Grundkörper eine abelsche Kategorie. Allgemeiner ist für einen beliebigen assoziativen Ring R mit 1 die Kategorie der Links- R -Moduln $L - \mathfrak{M}od_R$ und die Kategorie der Rechts- R -Moduln $R - \mathfrak{M}od_R$ eine abelsche Kategorie.
- 3) Für jeden topologischen Raum T ist die Kategorie $\mathfrak{A}b(T)$ der Garben abelscher Gruppen auf T eine abelsche Kategorie.

Wir wollen nun auch Garben von Moduln betrachten.

Definition 2.4 Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum. **Eine Garbe von \mathcal{O}_X -Moduln auf X** ist eine Garbe \mathcal{F} von abelschen Gruppen auf X , so dass für alle offenen Teilmengen U von X die Gruppe $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul ist und so dass für alle offenen $V \subset U$ die Restriktionsabbildung $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ verträglich mit den Modulstrukturen über den Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ ist. (Übungsaufgabe: Schreiben Sie sich das zugehörige kommutative Diagramm auf.)

Ein Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ von Garben von \mathcal{O}_X -Moduln ist ein Garbenmorphismus, so dass für alle offenen $U \subset X$ die Abbildung $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$ -Modulhomomorphismus ist.

Übungsaufgabe: Kern, Kokern und Bild von Morphismen von \mathcal{O}_X -Moduln sind wieder \mathcal{O}_X -Moduln, die direkte Summe von \mathcal{O}_X -Moduln ist ein \mathcal{O}_X -Modul.

Also erhalten wir zusätzlich als **Beispiel**

-
- 4) Die Kategorie $\mathcal{Mod}(X)$ der Garben von \mathcal{O}_X -Moduln auf dem Schema X ist eine abelsche Kategorie.

Definition 2.5 *Es sei \mathfrak{a} eine Kategorie*

- i) Ein Morphismus $f : A \rightarrow B$ heißt **Monomorphismus**, falls für alle Objekte X in \mathfrak{a} die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}(X, A) &\rightarrow \text{Hom}(X, B) \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

injektiv ist.

- ii) Ein Morphismus $f : A \rightarrow B$ heißt **Epimorphismus**, falls für alle Objekte X in \mathfrak{a} die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}(B, X) &\rightarrow \text{Hom}(A, X) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

injektiv ist.

- iii) Ein Morphismus $f : A \rightarrow B$ heißt **Isomorphismus**, falls es einen Morphismus $g : B \rightarrow A$ mit $g \circ f = \text{id}_A$ und $f \circ g = \text{id}_B$ gibt.

Beispiele: 1) In \mathfrak{Sets} und \mathfrak{Groups} ist eine Abbildung genau dann ein Monomorphismus, wenn sie injektiv ist, und genau dann ein Epimorphismus, wenn sie surjektiv ist. Ferner ist in \mathfrak{Sets} und \mathfrak{Groups} eine Abbildung genau dann ein Isomorphismus, wenn sie ein Monomorphismus und ein Epimorphismus ist. Das gilt nicht in jeder Kategorie.

2) In einer abelschen Kategorie ist jeder Kern ein Monomorphismus und jeder Kokern ein Epimorphismus.

Definition 2.6 *Es sei \mathfrak{a} eine abelsche Kategorie und $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus in \mathfrak{a} . Dann definieren wir das Bild von f als*

$$\text{Bild}(f) = \text{Kern}(\text{Kokern}(f))$$

Ist also $p : B \rightarrow D$ der Kokern von f (für geeignetes D), so ist $\text{Bild}(f) = \text{Kern}(p)$ ein Morphismus $m : I \rightarrow B$ für geeignetes I . Für $f : A \rightarrow B$ ist die Komposition

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{p} D$$

definitionsgemäß gleich Null, also gibt es nach der Definition von Kern (p) einen Morphismus

$$\varepsilon : A \rightarrow I,$$

so dass $f = m \circ \varepsilon$ ist.

Lemma 2.7 *Der Morphismus m ist ein Monomorphismus, und der Morphismus ε ist ein Epimorphismus.*

Also lässt sich jeder Morphismus in einer abelschen Kategorie als Komposition eines Monomorphismus mit einem Epimorphismus schreiben.

Beweis : Als Kernmorphimus ist m ein Monomorphismus. Mit etwas Geduld zeigt man, dass ε ein Epimorphismus ist (Übungsaufgabe). \square

Proposition 2.8 *Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Morphismen in einer abelschen Kategorie, so dass $g \circ f = 0$ gilt. Dann gibt es zu $\text{Bild}(f) : I \rightarrow B$ und $\text{Kern}(g) : K \rightarrow B$ einen Morphismus*

$$i : I \rightarrow K,$$

so dass

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{i} & K \\ \text{Bild}(f) \searrow & & \swarrow \text{Kern}(g) \\ & B & \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

In \mathfrak{Ab} besagt diese Proposition einfach, dass aus $g \circ f = 0$ die Inklusion $\text{Bild}(f) \subset \text{Kern}(g)$ folgt, was leicht nachzurechnen ist.

Beweis : Nach Lemma 2.7 können wir $f : A \rightarrow B$ als $f = m \circ \varepsilon$ für einen Epimorphismus $\varepsilon : A \rightarrow I$ und einen Monomorphismus $m = \text{Bild}(f) : I \rightarrow B$ schreiben. Also ist

$$0 = g \circ f = g \circ m \circ \varepsilon.$$

Da ε ein Epimorphismus ist, folgt daraus, dass $g \circ m = 0$ ist. Nach der definierenden Eigenschaft von $\text{Kern}(g) : K \rightarrow B$ ist die Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(I, K) \rightarrow \text{Hom}(I, B) \rightarrow \text{Hom}(I, C)$$

exakt. Also folgt aus $g \circ m = 0$ die Existenz eines Morphismus $i : I \rightarrow K$, so dass $\text{Bild}(f) = m = \text{Kern}(g) \circ i$ ist. \square

Definition 2.9 Eine Sequenz von Morphismen

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} A_4 \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$$

in einer abelschen Kategorie \mathfrak{a} heißt **exakt**, falls für alle $k = 1, \dots, n-1$ der Morphismus i_k aus Proposition 2.8 (zu f_k und f_{k+1}) ein Isomorphismus ist. In diesem Fall ist also $\text{Bild}(f_k)$ isomorph zu $\text{Kern}(f_{k+1})$.

Haben wir in einer abelschen Kategorie zwei Morphismen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ gegeben mit $g \circ f = 0$, so sei $i : I \rightarrow K$ der Morphismus aus Proposition 2.8. Dieser hat einen Kokern

$$\text{Kokern}(i) : K \rightarrow D.$$

Das zugehörige Objekt D bezeichnen wir auch als $\text{Kern}(g)/\text{Bild}(f)$. In der Kategorie \mathfrak{Ab} ist dieses Objekt einfach der Quotient $\text{Kern}(g)/\text{Bild}(f)$.

Definition 2.10 Ein **Komplex** A^\bullet in einer abelschen Kategorie ist eine Kollektion von Objekten $A^k, k \in \mathbb{Z}$ und Morphismen $d^k : A^k \rightarrow A^{k+1}$ mit $d^{k+1} \circ d^k = 0$. (Sind die A^k nur für $k \geq 0$ gegeben, so setzt man die anderen $A^k = 0$).

Eine Kollektion von Morphismen $f^\bullet = (f^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $f^k : A^k \rightarrow B^k$, so dass für alle $k \in \mathbb{Z}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^k & \xrightarrow{f^k} & B^k \\ d^k \downarrow & & \downarrow d^k \\ A^{k+1} & \xrightarrow{f^{k+1}} & B^{k+1} \end{array}$$

kommutiert, heißt **Morphismus von Komplexen**.

Das k -te **Kohomologieobjekt** eines Komplexes A^\bullet ist definiert als

$$h^k(A^\bullet) = \text{Kern } d^k / \text{Bild } d^{k-1}$$

nach unseren obigen Konventionen.

Es sei $f^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ ein Morphismus von Komplexen in der abelschen Kategorie \mathfrak{a} . Dann kommutiert für alle $k \in \mathbb{Z}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^{k-1} & \xrightarrow{f^{k-1}} & B^{k-1} \\ d_A^{k-1} \downarrow & & \downarrow d_B^{k-1} \\ A^k & \xrightarrow{f^k} & B^k \\ d_A^k \downarrow & & \downarrow d_B^k \\ A^{k+1} & \xrightarrow{f^{k+1}} & B^{k+1} \end{array}$$

Insbesondere gilt für Kern $d_A^k : K_A^k \rightarrow A^k$, dass $d_B^k \circ f^k \circ (\text{Kern } d_A^k)$ gleich Null ist. Nach der definierenden Eigenschaft von Kern $d_B^k : K_B^k \rightarrow B^k$ gibt es also einen Morphismus $g^k : K_A^k \rightarrow K_B^k$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_A^k & \xrightarrow{g^k} & K_B^k \\ \text{Kern } d_A^k \downarrow & & \downarrow \text{Kern } d_B^k \\ A^k & \xrightarrow{f^k} & B^k \end{array}$$

kommutiert.

Analog betrachten wir Kokern $d_B^{k-1} : B^k \rightarrow C_B^k$. Dann ist $(\text{Kokern } d_B^{k-1}) \circ f^k \circ d_A^{k-1}$ gleich Null. Nach der definierenden Eigenschaft von Kokern $(d_A^{k-1}) : A^k \rightarrow C_A^k$ existiert also ein Morphismus $c^k : C_A^k \rightarrow C_B^k$, so dass

$$\begin{array}{ccc} A^k & \xrightarrow{f^k} & B^k \\ \text{Kokern } d_A^{k-1} \downarrow & & \downarrow \text{Kokern } d_B^{k-1} \\ C_A^k & \xrightarrow{c^k} & C_B^k \end{array}$$

kommutiert.

Also existiert auch für Bild $d_A^{k-1} : I_A^k \rightarrow A^k$ und Bild $d_B^{k-1} : I_B^k \rightarrow B^k$ ein Morphismus

$$I_A^k \xrightarrow{h^k} I_B^k,$$

so dass

$$\begin{array}{ccc} I_A^k & \xrightarrow{h^k} & I_B^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^k & \xrightarrow{f^k} & B^k \end{array}$$

kommutiert. Man kann leicht nachprüfen, dass die Morphismen $i_A^k : I_A^k \rightarrow K_A^k$ und $i_B^k : I_B^k \rightarrow K_B^k$ aus Proposition 2.8 das folgende Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{array}{ccc} I_A^k & \xrightarrow{h^k} & I_B^k \\ i_A^k \downarrow & & \downarrow i_B^k \\ K_A^k & \xrightarrow{g^k} & K_B^k \end{array}$$

Also erhalten wir für alle $k \in \mathbb{Z}$ einen Morphismus

$$h^k(f^\bullet) : h^k(A^\bullet) \rightarrow h^k(B^\bullet).$$

Jetzt brauchen wir ein paar Begriffe über Funktoren:

Ein **kovarianter Funktor** $F : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ von der Kategorie \mathfrak{a} in die Kategorie \mathfrak{b} ist eine Regel, die jedem Objekt A aus \mathfrak{a} ein Objekt $F(A)$ aus \mathfrak{b} und jedem Morphismus $f : A \rightarrow B$ in \mathfrak{a} einen Morphismus $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ zuordnet, so dass

i) $F(id_A) = id_{F(A)}$ und

ii) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

gilt. Ein **kontravarianter Funktor** ordnet $f : A \rightarrow B$ einen Morphismus $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$ zu, so dass i) und statt ii) die Bedingung $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ gilt.

Definition 2.11 i) Ein kovarianter Funktor $F : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ zwischen zwei abelschen Kategorien heißt **additiv**, falls für alle Objekte A, B in \mathfrak{a}

$$\text{Hom}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}(F(A), F(B))$$

$$f \mapsto F(f)$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist.

ii) F heißt **linksexakt**, falls F additiv ist und jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ in \mathfrak{a} in eine exakte Sequenz $0 \rightarrow F(A') \rightarrow F(A) \rightarrow F(A'')$ in \mathfrak{b} überführt.

iii) Überführt F stattdessen jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ in eine exakte Sequenz

$$F(A') \rightarrow F(A) \rightarrow F(A'') \rightarrow 0,$$

so heißt F **rechtsexakt**.

iv) Ist F links- und rechtsexakt, so nennen wir F **exakt**.

Analoge Begriffe gelten für kontravariante Funktoren, wobei hier linksexakt bedeutet, dass $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ in $0 \rightarrow F(A'') \rightarrow F(A) \rightarrow F(A')$ überführt wird.

Beispiele:

- 1) Die Einbettung einer Unterkategorie \mathfrak{a} in eine Kategorie \mathfrak{b} ist ein Funktor.
- 2) Sei \mathfrak{a} eine abelsche Kategorie und A ein Objekt in \mathfrak{a} . Dann ist

$$\begin{aligned}\text{Hom}(A, -) : \mathfrak{a} &\rightarrow \mathfrak{Ab} \\ B &\mapsto \text{Hom}(A, B)\end{aligned}$$

ein kovarianter linksexakter Funktor, und

$$\begin{aligned}\text{Hom}(-, A) : \mathfrak{a} &\rightarrow \mathfrak{Ab} \\ B &\mapsto \text{Hom}(B, A)\end{aligned}$$

ein kontravarianter linksexakter Funktor. (Übungsaufgabe, das folgt aus den Axiomen einer abelschen Kategorie.)

- 3) Der Vergißfaktor $\mathfrak{Mod}_A \rightarrow \mathfrak{Ab}$ ist exakt.

Definition 2.12 Seien \mathfrak{a} und \mathfrak{b} Kategorien.

- i) Ein kovarianter Funktor $F : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ heißt **treu**, falls für alle Objekte A, B in \mathfrak{a} die Abbildung

$$\text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(F(A), F(B))$$

injektiv ist.

- ii) $F : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ heißt **voll**, falls für alle Objekte A, B in \mathfrak{a} die Abbildung

$$\text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(F(A), F(B))$$

surjektiv ist.

- iii) F heißt **volltreu**, falls F voll und treu ist, d.h. falls für alle Objekte A, B in \mathfrak{a} die Abbildung

$$\text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(F(A), F(B))$$

bijektiv ist.

- iv) $F : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ heißt **volltreue Einbettung**, falls F volltreu ist und falls für alle Objekte $A, B \in \mathfrak{a}$ gilt: Ist $F(A) = F(B)$, so folgt $A = B$.

Beispiel:

- 1) Die Vergißfunktoren $\mathcal{G}roups \rightarrow \mathcal{S}ets$, und $\mathcal{M}od_A \rightarrow \mathcal{G}roups$ sind treu, aber nicht voll.
- 2) Ist \mathfrak{a} eine volle Unterkategorie von \mathfrak{b} , so ist der Inklusionsfunktork $i : \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{b}$ eine volltreue Einbettung.

Die Argumente in abelschen Kategorien können etwas ermüdend sein. Sehr nützlich ist der folgende Satz

Satz 2.13 (Einbettungssatz von Freyd-Mitchell)

Für jede *kleine* abelsche Kategorie \mathfrak{a} existiert ein (eventuell nicht kommutativer) Ring R und eine volltreue, exakte Einbettung $i : \mathfrak{a} \rightarrow L - \mathcal{M}od_R$.

Beweis: [Wei].

Mit Hilfe dieses Satzes kann man jedes Argument, das ein endliches Diagramm in einer abelschen Kategorie involviert, in der Kategorie $L - \mathcal{M}od_R$ für geeignetes R nachprüfen. Insbesondere können wir in solchen Situationen annehmen, dass unsere Objekte Mengen mit Zusatzstrukturen sind und Beweise mit Diagrammjagd führen.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir das sogenannte Schlangenlemma beweisen. Man kann es auch direkt zeigen, siehe etwa [ML].

Lemma 2.14 (Schlangenlemma)

Es sei \mathfrak{a} eine abelsche Kategorie. Das folgende Diagramm von Objekten und Morphismen in \mathfrak{a} sei kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{p} & C' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \longrightarrow & C \end{array}$$

Außerdem seien beide Zeilen exakt. Dann existiert eine exakte Sequenz

$$\text{Kern } f \rightarrow \text{Kern } g \rightarrow \text{Kern } h \xrightarrow{\partial} \text{Kokern } f \rightarrow \text{Kokern } g \rightarrow \text{Kokern } h.$$

Ist der Kern von $A' \rightarrow B'$ gleich 0, so ist auch der Kern von $\text{Kern } f \rightarrow \text{Kern } g$ gleich 0. Ist der Kokern von $B \rightarrow C$ gleich 0, so ist auch der Kokern von $\text{Kokern } g \rightarrow \text{Kokern } h$ gleich null.

Beweis : Wir betrachten die kleinste abelsche Unterkategorie \mathfrak{a}' von \mathfrak{a} , die die Objekte und die Morphismen aus dem Diagramm enthält. Das ist eine kleine Kategorie.

Nach dem Satz von Freyd-Mitchell müssen wir die Behauptung also nur für die abelsche Kategorie $L - \mathfrak{Mod}_R$ für einen beliebigen Ring R zeigen.

Die Morphismen $A' \rightarrow B' \xrightarrow{P} C'$ liefern durch Einschränkung Morphismen

$$\text{Kern } f \rightarrow \text{Kern } g \rightarrow \text{Kern } h.$$

Da $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ exakt ist, ist auch die Kernsequenz exakt.

Analog zeigt man, dass die Morphismen $A \xrightarrow{i} B \rightarrow C$ durch Übergang zu den Quotienten eine exakte Sequenz

$$\text{Kokern } f \rightarrow \text{Kokern } g \rightarrow \text{Kokern } h$$

liefern.

Es fehlt noch die Konstruktion des Verbindungshomomorphismus δ . Sei $c \in \text{Kern } h \subset C'$. Da $\text{Kokern } p = 0$ ist, gilt $c = p(b)$ für ein $b \in B'$. Wegen der Kommutativität des Diagramms liegt $g(b)$ im Kern von $B \rightarrow C$, also im Bild von $i : A \rightarrow B$. Also existiert genau ein $a \in A$ mit $i(a) = g(b)$. Das Element a definiert eine Klasse $a + \text{Bild}(f)$ in $\text{Kokern}(f) = A/\text{Bild}(f)$. Wir setzen $\delta(c) = a + \text{Bild}(f)$.

Ist $c = p(b_1)$ für ein anderes $b_1 \in B'$, so folgt $p(b - b_1) = 0$. Also ist $b - b_1$ im Bild von $A' \rightarrow B'$. Ist $g(b) = i(a)$ und $g(b_1) = i(a_1)$, so liegt also $a - a_1$ im Bild von f . Daher ist

$$a + \text{Bild}(f) = a_1 + \text{Bild}(f)$$

in $\text{Kokern}(f)$.

Liegt c im Kern von δ , so gilt nach Konstruktion $c = p(b)$ mit $g(b) = i(a)$ und $a \in \text{Bild}(f)$. Also ist $a = f(a')$ für ein $a' \in A'$. Ist b' das Bild von a' unter $A' \rightarrow B'$, so folgt

$$g(b') = i \circ f(a') = i(a) = g(b).$$

Also ist $b - b'$ ein Element in $\text{Kern}(g)$ mit $p(b - b') = p(b) = c$. Somit liegt $c \in \text{Bild von } \text{Kern}(g) \rightarrow \text{Kern}(h)$. Umgekehrt nehmen wir an, dass c im Bild von $\text{Kern}(g) \rightarrow \text{Kern}(h)$ liegt. Also existiert ein $b \in \text{Kern}(g)$ mit $p(b) = c$. Aus $g(b) = 0$ folgt nach Konstruktion $\delta(c) = 0$ in $\text{Kokern}(f)$.

Daher ist auch die Sequenz $\text{Kern } g \rightarrow \text{Kern } h \xrightarrow{\delta} \text{Kokern } f$ exakt. Ferner zeigt man leicht, dass $\text{Kern } h \xrightarrow{\delta} \text{Kokern } f \rightarrow \text{Kokern } g$ exakt ist.

Die beiden Zusätze sind ebenfalls leicht zu zeigen (Übungsaufgabe). □

Korollar 2.15 (Fünferlemma)

Für jedes kommutative Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{\gamma'} & D' & \longrightarrow & E' \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e \\
 A & \xrightarrow{\alpha} & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E
 \end{array}$$

mit exakten Zeilen in einer abelschen Kategorie gilt:

- i) Ist $\text{Kern } b = 0$, $\text{Kern } d = 0$ und $\text{Kokern } a = 0$, so ist $\text{Kern } c = 0$.
- ii) Ist $\text{Kokern } b = 0$, $\text{Kokern } d = 0$ und $\text{Kern } e = 0$, so ist $\text{Kokern } c = 0$.
- iii) Sind a, b, d und e Isomorphismen, so ist c ein Isomorphismus.

Beweis : Wir betrachten das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
 B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & \text{Bild } \gamma' & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow b' & & \downarrow c & & \downarrow d' & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Kokern } (\alpha) & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D,
 \end{array}$$

wobei b' und d' durch b und d induziert sind. Aus dem Schlangenlemma und $\text{Kern } d = 0$ folgt, dass $\text{Kern } b' \rightarrow \text{Kern } c$ surjektiv ist. Für jedes $x \in \text{Kern } c$ existiert also ein Urbild $y \in \text{Kern } b'$. Also ist $b(y) \in \text{Bild } (\alpha)$. Da $\text{Kokern } a = 0$ ist, ist a surjektiv, also folgt $b(y) = \alpha(a(z))$ für ein $z \in A$. Da $\text{Kern } b = 0$ ist, kommt y von einem Element in A' , geht also in C' auf 0. Also ist $x = 0$.

- i) analog zu i).
- ii) folgt aus i) und ii).

□

Satz 2.16 Es sei $0 \rightarrow A^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} C^\bullet \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen in einer abelschen Kategorie \mathfrak{a} .

Dann gibt es folgende lange exakte Sequenz der Kohomologiegruppen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \rightarrow & h^{k-1}(A^\bullet) & \rightarrow & h^{k-1}(B^\bullet) & \rightarrow & h^{k-1}(C^\bullet) & \xrightarrow{\delta} & h^k(A^\bullet) & \rightarrow & h^k(B^\bullet) & \rightarrow & h^k(C^\bullet) & \xrightarrow{\delta} \\
 & & h^{k+1}(A^\bullet) & \rightarrow & h^{k+1}(B^\bullet) & \rightarrow & h^{k+1}(C^\bullet) & \rightarrow & \dots & & & & &
 \end{array}$$

$0 \rightarrow A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow 0$
 Ein Morphismus \downarrow \downarrow \downarrow von kurzen exakten Sequenzen
 $0 \rightarrow A'^\bullet \rightarrow B'^\bullet \rightarrow C'^\bullet \rightarrow 0$
 von Komplexen induziert einen Morphismus zwischen den zugehörigen langen exakten Sequenzen.

Beweis : Die kurze exakte Sequenz von Komplexen liefert für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Kokern } d_A^{k-1} & \xrightarrow{\bar{f}^k} & \text{Kokern } d_B^{k-1} & \xrightarrow{\bar{g}^k} & \text{Kokern } d_C^{k-1} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \bar{d}_A^k & & \downarrow \bar{d}_B^k & & \downarrow \bar{d}_C^k & & \\
 0 \longrightarrow & \text{Kern } d_A^{k+1} & \xrightarrow{f^{k+1}} & \text{Kern } d_B^{k+1} & \xrightarrow{g^{k+1}} & \text{Kern } d_C^{k+1} & .
 \end{array}$$

Hier sind \bar{f}^k und \bar{g}^k die von f^k und g^k auf den Kokernen induzierten Abbildungen. Analog sind \bar{d}_A^k, \bar{d}_B^k und \bar{d}_C^k definiert. Nach dem Schlangenlemma 2.14 erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\text{Kern } \bar{d}_A^k \rightarrow \text{Kern } \bar{d}_B^k \rightarrow \text{Kern } \bar{d}_C^k \xrightarrow{\delta} \text{Kokern } \bar{d}_A^k \rightarrow \text{Kokern } \bar{d}_B^k \rightarrow \text{Kokern } \bar{d}_C^k.$$

Nun ist

$$\text{Kern } \bar{d}_A^k = \text{Kern } d_A^k / \text{Bild } d_A^{k-1} = h^k(A^\bullet)$$

und $\text{Kokern } \bar{d}_A^k = \text{Kern } d_A^{k+1} / \text{Bild } d_A^k = h^{k+1}(A^\bullet).$

Analoges gilt für \bar{d}_B^k und \bar{d}_C^k .

Daraus folgt die lange exakte Sequenz. Die Funktionalität bezüglich Morphismen kurzer exakter Sequenzen von Komplexen folgt aus den Definitionen (Übungsaufgabe). □

Sind $f^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ und $g : B^\bullet \rightarrow C^\bullet$ Morphismen von Komplexen, so dass für alle $k \in \mathbb{Z}$ die Sequenz

$$0 \rightarrow A^k \xrightarrow{f^k} B^k \xrightarrow{g^k} C^k \rightarrow 0$$

exakt ist, so nennen wir $0 \rightarrow A^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} C^\bullet \rightarrow 0$ eine **kurze exakte Sequenz von Komplexen**.

Zwei Morphismen $f^\bullet, g^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ von Komplexen heißen **homotop** (wir schreiben $f^\bullet \sim g^\bullet$), falls es eine Kollektion von Morphismen $h^k : A^k \rightarrow B^{k-1}$ gibt mit

$$f^k - g^k = d_B^{k-1} h^k + h^{k+1} d_A^k.$$

Die Folge $h^\bullet = (h^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt dann **Homotopieoperator**. Vorsicht: h^\bullet ist kein Morphismus von Komplexen.

Lemma 2.17 Falls $f^\bullet \sim g^\bullet$, so ist $h^k(f^\bullet) = h^k(g^\bullet) : h^k(A^\bullet) \rightarrow h^k(B^\bullet)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis : Definitionsgemäß werden die Abbildungen $h^k(f^\bullet), h^k(g^\bullet) : h^k(A^\bullet) = \text{Kern } d_A^k / \text{Bild } d_A^{k-1} \rightarrow \text{Kern } d_B^k / \text{Bild } d_B^{k-1} = h^k(B^\bullet)$ von den Einschränkungen von f^k bzw. g^k auf $\text{Kern } d_A^k$ induziert. Also genügt es zu zeigen, dass für jedes $x \in \text{Kern } d_A^k$ gilt:

$$f^k(x) \equiv g^k(x) \pmod{\text{Bild } d_B^{k-1}}.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} f^k(x) - g^k(x) &= d_B^{k-1} h^k(x) + h^{k+1} d_A^k(x) \\ &\stackrel{x \in \text{Kern } d_A^k}{=} d_B^{k-1} h^k(x) \\ &\in \text{Bild } d_B^{k-1}, \end{aligned}$$

also ist die Behauptung bewiesen. □

Definition 2.18 Die Komplexe A^\bullet und B^\bullet in der abelschen Kategorie \mathfrak{a} heißen **homotopieäquivalent**, falls es Morphismen von Komplexen $f^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ und $g^\bullet : B^\bullet \rightarrow A^\bullet$ gibt, so dass $f^\bullet \circ g^\bullet$ homotop zu id_{B^\bullet} und $g^\bullet \circ f^\bullet$ homotop zu id_{A^\bullet} ist.

Wir wollen nun die Kohomologie linksexakter Funktoren definieren. Dafür benötigen wir injektive Auflösungen.

Definition 2.19 i) Ein Objekt I in einer abelschen Kategorie \mathfrak{a} heißt **injektiv**, falls der Funktor $\text{Hom}(-, I) : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{Ab}$, der A auf $\text{Hom}(A, I)$ abbildet, exakt ist.

Eine **injektive Auflösung** eines Objektes A in \mathfrak{a} ist ein Komplex I^\bullet in \mathfrak{a} mit $I^k = 0$ für $k < 0$ zusammen mit einem Morphismus $\mathcal{E} : A \rightarrow I^0$, so dass alle I^k injektiv sind und so dass die Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\mathcal{E}} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

exakt ist.

ii) Falls für jedes Objekt A in \mathfrak{a} ein Homomorphismus $f : A \rightarrow I$ mit $\text{Kern } f = 0$ existiert, so sagen wir, \mathfrak{a} hat **genug Injektive**. In diesem Fall hat jedes Objekt eine injektive Auflösung.

Beispiel:

- i) Die abelsche Gruppe \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ist injektiv in \mathfrak{Ab} .
- ii) Die Kategorie \mathfrak{Ab} enthält genug Injektive. Eine abelsche Gruppe A ist nämlich genau dann injektiv in \mathfrak{Ab} , wenn sie divisibel ist, d.h. wenn es für jedes $x \in A$ und jede natürliche Zahl m ein $y \in A$ mit

$$my = x$$

gibt (Übungsaufgabe).

Ist B eine beliebige abelsche Gruppe, so betrachten wir $B^* = \text{Hom}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ und $B^{**} = \prod_{b^* \in B^*} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Dann ist B^{**} divisibel, also injektiv, und der Gruppenhomomorphismus

$$\varepsilon : B \rightarrow B^{**},$$

gegeben durch $\varepsilon(b) = (b^*(b))_{b^*} \in B^{**}$ ist injektiv.

Analog zeigt man, dass für jeden kommutativen Ring A die Kategorie \mathfrak{Mod}_A genug Injektive hat.

Lemma 2.20 *Es sei B^\bullet ein exakter Komplex mit $B^k = 0$ für $k < -1$, d.h. eine exakte Sequenz der Form*

$$0 \rightarrow B_{-1} \xrightarrow{d_{B_{-1}}^{-1}} B_0 \xrightarrow{d_B^0} B_1 \rightarrow \dots$$

Ferner sei $\varphi : B_{-1} \rightarrow A$ ein Morphismus. Für jede injektive Auflösung $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$ von A existiert dann ein Morphismus von Komplexen f^\bullet von B^\bullet in den Komplex $A \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$ mit $f^{-1} = \varphi$.

Mit anderen Worten, es existieren Morphismen $f^k : B^k \rightarrow I^k$ für $k \geq 0$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B^{-1} & \longrightarrow & B^0 & \longrightarrow & B^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow f^0 & & \downarrow \varphi^1 & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

kommutiert.

Je zwei solche Morphismen von Komplexen sind homotop.

Beweis : Da I^0 injektiv ist, existiert ein $f^0 : B^0 \rightarrow I^0$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & B^{-1} \xrightarrow{d_B^{-1}} B^0 \\ & & \downarrow \varphi \qquad \downarrow f^0 \\ 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \end{array}$$

kommutiert. Wir betrachten den Morphismus $d_I^0 \circ f^0 : B^0 \rightarrow I^1$. Es gilt $d_I^0 \circ f^0 \circ d_B^{-1} = d_I^0 \circ \varepsilon \circ \varphi = 0$, also erhalten wir einen Morphismus $B^0/\text{Bild } d_B^{-1} \rightarrow I^1$. Die Sequenz $0 \rightarrow B^0/\text{Bild } d_B^{-1} \rightarrow B^1$ ist exakt. Daher liefert die Injektivität von I^1 einen Morphismus $f^1 : B^1 \rightarrow I^1$, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B^0 & \longrightarrow & B^1 \\ f^0 \downarrow & & \downarrow f^1 \\ I^0 & \longrightarrow & I^1 \end{array}$$

kommutiert. Auf diese Weise konstruieren wir induktiv alle f^k .

Ist g^\bullet ein anderer Morphismus von B^\bullet in den Komplex $0 \rightarrow A \rightarrow I^\bullet$ mit $g^{-1} = \varphi$, so setzen wir $h^0 : B^0 \rightarrow A$ und $h^{-1} : B^{-1} \rightarrow 0$ gleich 0. Da $f^{-1} - g^{-1} = 0$ ist, ist die Homotopiebedingung an dieser Stelle erfüllt.

Wir nehmen induktiv an, wir haben für alle $k \leq n$ Morphismen $h^k : B^k \rightarrow I^{k-1}$ konstruiert, die für alle $k < n$

$$f^k - g^k = d_I^{k-1} h^k + h^{k+1} d_B^k$$

erfüllen.

Wir betrachten den Morphismus

$$(f^n - g^n - d_I^{n-1} h^n) \circ d_B^{n-1} : B^{n-1} \rightarrow B^n \rightarrow I^n.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & (f^n - g^n - d_I^{n-1} h^n) d_B^{n-1} \\ = & (f^n - g^n) d_B^{n-1} - d_I^{n-1} h^n d_B^{n-1} \\ \stackrel{I.V.}{=} & (f^n - g^n) d_B^{n-1} - d_I^{n-1} (f^{n-1} - g^{n-1} - d_I^{n-2} h^{n-1}) \\ \stackrel{d^n \circ d^{n-1} = 0}{=} & (f^n - g^n) d_B^{n-1} - d_I^{n-1} (f^{n-1} - g^{n-1}) \\ = & 0, \end{aligned}$$

da f^\bullet und g^\bullet Morphismen vom Komplexen sind. Somit verschwindet $(f^n - g^n - d_I^{n-1} h^n)$ auf Bild d_B^{n-1} , also induziert dieser Morphismus einen Morphismus

$$B^n/\text{Bild } d_B^{n-1} \rightarrow I^n.$$

Da I^n injektiv und $0 \rightarrow B^n/\text{Bild } d_B^{n-1} \rightarrow B^{n+1}$ exakt ist, existiert ein Morphismus $h^{n+1} : B^{n+1} \rightarrow I^n$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B^n & \xrightarrow{d_B^n} & B^{n+1} \\ \downarrow (f^n - g^n - d_I^{n-1} h^n) & & \swarrow h^{n+1} \\ I^n & & \end{array}$$

kommutativ macht. Also gilt

$$f^n - g^n = d_I^{n-1} h^n + h^{n+1} d_B^n,$$

und der neue Morphismus h^{n+1} erfüllt ebenfalls die Homotopieeigenschaft. Daher sind f^\bullet und g^\bullet homotop. \square

Definition 2.21 Es sei \mathfrak{a} eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven, und $F : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ sei ein kovarianter linksexakter Funktor. Für alle $k \geq 0$ definieren wir die rechts abgeleiteten Funktoren

$$R^k F : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$$

wie folgt: Für jedes A in \mathfrak{a} wählen wir ein für alle Mal eine injektive Auflösung. Dann sei

$$(R^k F)(A) = h^k(F(I^\bullet)).$$

Satz 2.22 In der obigen Situation sind alle $R^k F$ additive Funktoren, und $R^0 F = F$. Bis auf Isomorphe sind die $R^k F$ unabhängig von den gewählten injektiven Auflösungen.

Jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ in \mathfrak{a} induziert eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow R^k F(A') \rightarrow R^k F(A) \rightarrow R^k F(A'') \xrightarrow{\delta} R^{k+1} F(A') \rightarrow \dots$$

Ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & A & \rightarrow & A'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & B' & \rightarrow & B & \rightarrow & B'' \rightarrow 0 \end{array}$$

von kurzen exakten Sequenzen induziert hierbei ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen.

Außerdem ist $R^k F(I) = 0$ für alle $k > 0$, falls I injektiv ist.

Beweis : Die Additivität der $R^k F$ folgt aus der Konstruktion.

Ist $A \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$ eine injektive Auflösung von A , so ist

$$\begin{aligned} R^0 F(A) &= h^0(F(I^\bullet)) \\ &= \text{Kern}(F(I^0) \rightarrow F(I^1)) \\ &= F(A), \end{aligned}$$

da F linksexakt ist.

Wählen wir eine andere injektive Auflösung $A \rightarrow J^\bullet$ von A , so existiert nach Lemma 2.20 ein Morphismus von Komplexen

$$\alpha^\bullet : I^\bullet \rightarrow J^\bullet,$$

so dass $\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & I^\bullet \\ \parallel & & \downarrow \alpha^\bullet \\ A & \rightarrow & J^\bullet \end{array}$ kommutiert und ein Morphismus von Komplexen

$$\beta^\bullet : J^\bullet \rightarrow I^\bullet,$$

so dass $\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & J^\bullet \\ \parallel & & \downarrow \beta^\bullet \\ A & \rightarrow & I^\bullet \end{array}$ kommutiert.

Nach Lemma 2.20 ist ferner $\beta^\bullet \circ \alpha^\bullet$ homotop zu id_{I^\bullet} und $\alpha^\bullet \circ \beta^\bullet$ homotop zu id_{J^\bullet} , d.h. I^\bullet und J^\bullet sind homotopieäquivalent. Dann sind auch $F(I^\bullet)$ und $F(J^\bullet)$ homotopieäquivalent, woraus nach Lemma 2.17 $h^k(F(I^\bullet)) \simeq h^k(F(J^\bullet))$ folgt.

Ist I injektiv, so können wir als injektive Auflösung von I den Komplex

$$0 \rightarrow I \rightarrow I \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

nehmen. Daher ist $(R^k F)(I) = 0$ für alle $k > 0$.

Ist $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen in \mathfrak{a} , so seien $A' \xrightarrow{\varepsilon'} I^\bullet$ und $A'' \xrightarrow{\varepsilon''} I''^\bullet$ injektive Auflösungen von A' und A'' . Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \varepsilon' \downarrow & & & & \downarrow \varepsilon'' \\ 0 & \longrightarrow & I'^0 & \longrightarrow & I'^0 \oplus I''^0 & \longrightarrow & I''^0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Da I'^0 injektiv ist, gibt es einen Morphismus $\delta' : A \rightarrow I'^0$, so dass

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ \varepsilon' \downarrow & & \swarrow \delta' \\ I'^0 & & \end{array}$$

kommutiert. Ferner definieren wir $\delta'' : A \rightarrow I''^0$ als die Verknüpfung von $A \rightarrow A''$ mit $\varepsilon'' : A'' \rightarrow I''^0$.

Wir setzen $\varepsilon = \delta' \oplus \delta'' : A \rightarrow I'^0 \oplus I''^0$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon'' \\ 0 & \longrightarrow & I'^0 & \longrightarrow & I'^0 \oplus I''^0 & \longrightarrow & I''^0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

kommutativ. Nach Konstruktion ist

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I'^0 \oplus I''^0$$

exakt. In dieser Weise konstruieren wir induktiv eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A \rightarrow I'^\bullet \oplus I''^\bullet,$$

also eine injektive Auflösung von A , so dass

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & I'^\bullet & \longrightarrow & I'^\bullet \oplus I''^\bullet & \longrightarrow & I''^\bullet \longrightarrow 0 \end{array}$$

kommutativ ist.

Wir können nun $R^k F(A)$ mit der injektiven Auflösung $A \rightarrow I'^\bullet \oplus I''^\bullet$ berechnen. Da F additiv ist, ist $F(I'^\bullet \oplus I''^\bullet) = F(I'^\bullet) \oplus F(I''^\bullet)$. Also ist

$$0 \rightarrow F(I'^\bullet) \rightarrow F(I'^\bullet \oplus I''^\bullet) \rightarrow F(I''^\bullet) \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. Satz 2.16 liefert nun die lange exakte Kohomologiesequenz, die funktoriell bezüglich Morphismen kurzer exakter Sequenzen ist. \square

Beispiel: Für jede abelsche Gruppe A hat der linksexakte kovariante Funktor

$$F = \text{Hom}(A, -) : \mathfrak{Ab} \rightarrow \mathfrak{Ab}$$

abgeleitete Funktoren $(R^k F)_k \geq 0$, die wir als $R^k F(B) = \text{Ext}^k(A, B)$ bezeichnen.

Ist \mathfrak{a} eine Kategorie, so bezeichnen wir mit \mathfrak{a}^{opp} die Kategorie mit denselben Objekten und mit

$$\text{Hom}_{\mathfrak{a}^{opp}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathfrak{a}}(B, A).$$

Wir drehen also alle Pfeile in \mathfrak{a} um. Ist $F : \mathfrak{a} \rightarrow b$ ein kontravarianter linksexakter Funktor, so induziert F einen kovarianten linksexakten Funktor $\mathfrak{a}^{opp} \rightarrow b$. Hat also \mathfrak{a}^{opp} genug Injektive (d.h. hat \mathfrak{a} genug Projektive), so können wir mit dem obigen Prinzip auch kontravariante linksexakte Funktoren ableiten.

Definition 2.23 Ein Objekt J in \mathfrak{a} heißt F -azyklisch, falls $R^k F(J) = 0$ für alle $k > 0$ ist.

Injektive Objekte sind also nach Satz 2.22 azyklisch.

Man kann Kohomologie nun allgemeiner mit azyklischen Auflösungen berechnen:

Satz 2.24 Es sei \mathfrak{a} eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven. Es sei $0 \rightarrow A \xrightarrow{\delta} J^0 \rightarrow J^1 \rightarrow \dots$ eine F -azyklische Auflöser, d.h. eine exakte Sequenz in \mathfrak{a} , so dass alle J^i F -azyklisch sind. Dann ist für alle $k \geq 0$

$$R^k F(A) = h^k(F(J^\bullet)).$$

Beweis : Wir wählen ein injektives Objekt I^0 in \mathfrak{a} und eine exakte Sequenz $0 \rightarrow J^0 \xrightarrow{f^0} I^0$. Für $\varepsilon : A \rightarrow J^0 \rightarrow I^0$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\delta} & J^0 \\ & & \text{id} \downarrow & & \downarrow f^0 \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & I^0 \end{array}$$

kommutativ.

Ferner gibt es ein injektives Objekt I^1 in \mathfrak{a} mit exakten Sequenzen $0 \rightarrow J^1 \xrightarrow{f^1} I^1$ und $0 \rightarrow I^0/\text{Bild } \varepsilon \rightarrow I^1$, so dass

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & J^0/\text{Bild } \delta & \longrightarrow & J^1 \\ & & \downarrow & & \downarrow f^1 \\ 0 & \longrightarrow & I^0/\text{Bild } \varepsilon & \longrightarrow & I^1 \end{array}$$

kommutiert (Übungsaufgabe). Dann ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & J^0 & \rightarrow & J^1 \\ & & \parallel & & \downarrow f^0 & & \downarrow f^1 \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & I^0 & \rightarrow & I^1 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Induktiv konstruieren wir so eine injektive Auflösung $0 \rightarrow A \rightarrow I^\bullet$ von A sowie einen Morphismus $f^\bullet : J^\bullet \rightarrow I^\bullet$ von Komplexen, so dass alle

$$0 \rightarrow J^l \xrightarrow{f^l} I^l$$

exakt sind.

Es sei Y^l der Kokern von f^l , d.h.

$$0 \rightarrow J^l \xrightarrow{f^l} I^l \rightarrow Y^l \rightarrow 0$$

ist exakt. Die lange exakte Kohomologiesequenz zu dieser kurzen exakten Sequenz liefert für alle $k \geq 1$ eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} R^k F(J^l) & \rightarrow & R^k F(I^l) & \rightarrow & R^k F(Y^l) & \rightarrow & R^k F(J^l), \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

woraus folgt, dass Y^l azyklisch ist. Ferner erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow F(J^l) \rightarrow F(I^l) \rightarrow F(Y^l) \rightarrow R^1 F(J^l) = 0.$$

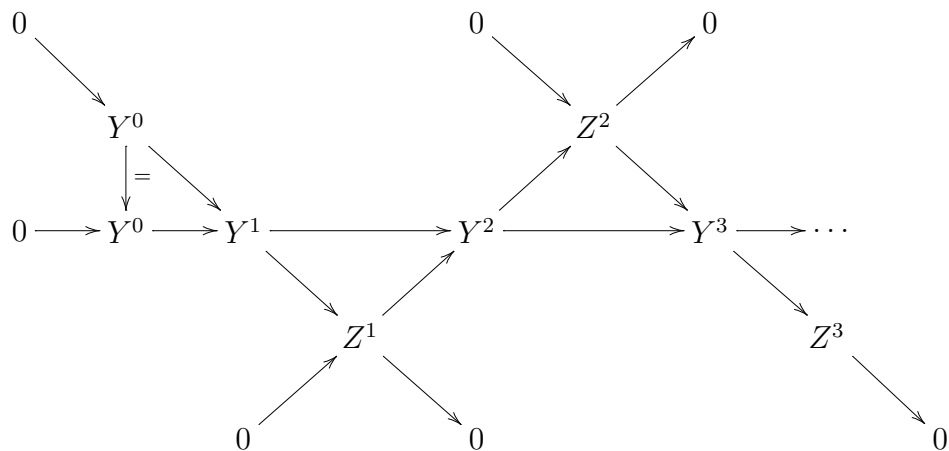
Also ist $0 \rightarrow F(J^\bullet) \rightarrow F(I^\bullet) \rightarrow F(Y^\bullet) \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. Nach Satz 2.16 erhalten wir die lange exakte Kohomologiesequenz

$$\dots \rightarrow R^{k-1} F(Y^\bullet) \rightarrow R^k F(J^\bullet) \rightarrow R^k F(I^\bullet) \rightarrow R^k F(Y^\bullet) \rightarrow \dots$$

Mit Lemma 2.25 folgt, dass $F(Y^\bullet)$ exakt ist. Also ist $R^k F(Y^\bullet) = 0$ für alle $k \geq 0$, woraus $R^k F(J^\bullet) \simeq R^k F(I^\bullet)$ für alle $k \geq 1$ folgt. Da $R^k F(A)$ definitionsgemäß gleich $R^k F(I^\bullet)$ ist, folgt die Behauptung. \square

Lemma 2.25 *Ist $0 \rightarrow Y^0 \xrightarrow{\delta_Y^0} Y^1 \xrightarrow{\delta_Y^1} Y^2 \rightarrow \dots$ ein exakter Komplex, so dass alle Y^k azyklisch sind, so ist auch $0 \rightarrow F(Y^0) \rightarrow F(Y^1) \rightarrow F(Y^2) \rightarrow \dots$ ein exakter Komplex.*

Beweis : Wir setzen $Z^k = \text{Kokern } \delta_Y^k$ und betrachten



Dann sind die schräg verlaufenden kurzen Sequenzen exakt. Die erste Sequenz $0 \rightarrow Y^0 \rightarrow Y^1 \rightarrow Z^1 \rightarrow 0$ liefert eine lange exakte Sequenz der Form

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \rightarrow & F(Y^0) & \rightarrow & F(Y^1) & \rightarrow & F(Z^1) & \rightarrow & R^1 F(Y^0) & \rightarrow & R^1 F(Y^1) & \rightarrow & R^1 F(Z^1) & \rightarrow & R^2 F(Y^0) & \rightarrow & \dots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & 0 & & & & 0 & & & & &
 \end{array}$$

Also ist $0 \rightarrow F(Y^0) \rightarrow F(Y^1) \rightarrow F(Z^1) \rightarrow 0$ exakt und $R^k F(Z^1) = 0$ für alle $k \geq 1$.

Dasselbe Argument wenden wir auf

$$0 \rightarrow Z^1 \rightarrow Y^2 \rightarrow Z^2 \rightarrow 0$$

an und erhalten $0 \rightarrow F(Z^1) \rightarrow F(Y^2) \rightarrow F(Z^2) \rightarrow 0$ exakt sowie $R^k F(Z^2) = 0$ für alle $k \geq 1$.

Induktiv schließen wir, dass

$$0 \rightarrow F(Z^k) \rightarrow F(Y^k) \rightarrow F(Z^{k+1}) \rightarrow 0$$

exakt ist für alle $k \geq 1$. Daraus folgt die Exaktheit von

$$0 \rightarrow F(Y^0) \rightarrow F(Y^1) \rightarrow F(Y^2) \rightarrow F(Y^3) \rightarrow \dots$$

□

Um solche abgeleiteten Funktoren zu vergleichen, ist oft folgende universelle Eigenschaft nützlich:

Definition 2.26 Es seien \mathfrak{a} , \mathfrak{b} abelsche Kategorien. Ein (kovarianter) δ -**Funktor** von \mathfrak{a} nach \mathfrak{b} ist eine Kollektion $(T^k)_{k \geq 0}$ von Funktoren $T^k : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$, zusammen mit Verbindungsabbildungen $\delta^k : T^k(A'') \rightarrow T^{k+1}(A')$ für alle kurzen exakten Sequenzen $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

i) Für jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ in \mathfrak{a} gibt es eine lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow T^0(A') \rightarrow T^0(A) \rightarrow T^0(A'') \xrightarrow{\delta^0} T^1(A') \rightarrow \dots \rightarrow T^k(A'') \xrightarrow{\delta^k} T^{k+1}(A') \rightarrow \dots$$

ii) Ein Morphismus kurzer exakter Sequenzen in \mathfrak{a} induziert einen Morphismus langer exakter Sequenzen in \mathfrak{b} .

Beispiel: Die Funktoren $(R^k F)_{k \geq 0}$ für einen kovarianten linksexakten Funktor F bilden einen kovarianten δ -Funktor.

Definition 2.27 Es seien \mathfrak{a} und \mathfrak{b} Kategorien und $F, G : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ Funktoren.

Ein Morphismus von Funktoren

$$\Phi : F \rightarrow G$$

ist ein System von Morphismen

$$\Phi_A : F(A) \rightarrow G(A)$$

für alle Objekte A in \mathfrak{a} , so dass für jeden Morphismus $f : A \rightarrow B$ in \mathfrak{a} das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\Phi_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow F(g) \\ F(B) & \xrightarrow{\Phi_B} & G(B) \end{array}$$

kommutiert.

Definition 2.28 Ein δ -Funktor $(T^k)_{k \geq 0} : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ heißt **universell**, falls es für alle anderen δ -Funktoren $(S^k)_{k \geq 0} : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ zusammen mit einem Morphismus von Funktoren

$$f^0 : T^0 \rightarrow S^0$$

eine eindeutig bestimmte Folge $f^k : T^k \rightarrow S^k (k \geq 0)$ von Morphismen von Funktoren gibt, die sich mit den δ^k vertragen.

Bis auf eindeutige Isomorphismen kann es also nur einen universellen δ -Funktor geben, der T^0 fortsetzt.

Satz 2.29 (Grothendieck) Sei $(T^k)_{k \geq 0}$ ein δ -Funktorkomplex. Falls es für alle $k > 0$ und für jedes Objekt A aus \mathfrak{a} eine exakte Sequenz $0 \rightarrow A \xrightarrow{u_k} J_k$ mit $T^k(u_k) = 0$ gibt (dann nennt man T auch *auslöscher*), so ist T universell in obigem Sinn.

Korollar 2.30 Sei \mathfrak{a} eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und $F : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ ein linksexakter kovarianter Funktor. Dann sind die rechts abgeleiteten Funktoren $(R^k F)_{k \geq 0}$ universelle δ -Funktorkomplexe.

Umgekehrt, sei $(T^k)_{k \geq 0}$ ein universeller δ -Funktorkomplex, dann ist T^0 linksexakt und $T^k \cong R^k T^0$ für alle $k \geq 0$.

Beweis : Nach Satz 2.22 sind die $(R^k F)_{k \geq 0}$ δ -Funktorkomplexe. Da alle Objekte A sich in ein injektives Objekt I einbetten lassen, und $R^k F(I) = 0$ ist für $k > 0$, sind die $R^k F$ für $k > 0$ auslöscher. Daher ist $(R^k F)$ nach Satz 2.29 universell.

Umgekehrt, sei $(T^k)_{k \geq 0}$ ein universeller δ -Funktorkomplex. Dann ist T^0 linksexakt, es existieren also die abgeleiteten Funktoren $(R^k T^0)_{k \geq 0}$. Dies ist ein universeller δ -Funktorkomplex mit $R^0 T^0 = T^0$. Aufgrund der universellen Eigenschaft folgt also $R^k T^0 \simeq T^k$. \square

3 Garbenkohomologie

Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum. Wir betrachten die abelsche Kategorie $\mathfrak{Mod}(X)$ der Garben von \mathcal{O}_X -Moduln (siehe Beispiel 4) aus § 2).

Lemma 3.1 Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum. Dann hat $\mathfrak{Mod}(X)$ genug Injektive.

Beweis : Wir benutzen, dass für jeden kommutativen Ring A die Kategorie \mathfrak{Mod}_A der A -Moduln genug Injektive hat. Sei \mathcal{F} eine Garbe von \mathcal{O}_X -Moduln. Jeder Halm \mathcal{F}_x ist dann ein $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul, also existiert eine Injektion $\mathcal{F}_x \rightarrow I_x$ in einem injektiven $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul.

Sei $j : \{x\} \rightarrow X$ die Inklusion. Wir betrachten die Garbe $j_*(I_x)$. Zur Erinnerung: Es gilt

$$j_*(I_x)(U) = I_x(j^{-1}U) = \begin{cases} I_x & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases},$$

$j_*(I_x)$ ist eine Garbe von \mathcal{O}_X -Moduln (Übungsaufgabe). Sei $\mathcal{I} = \prod_{x \in X} j_*(I_x)$.

Offenbar ist für jede Garbe \mathcal{G} von \mathcal{O}_X -Moduln

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_* I_x).$$

Andererseits gilt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_* I_x) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}_x, I_x)$ (Übungsaufgabe).

Setzen wir $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, so erhalten wir zu den Morphismen $\mathcal{F}_x \rightarrow I_x$ einen Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}$. Dieser ist injektiv auf den Halmen, also injektiv als Garbenmorphismus. Aus $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}_x, I_x)$ folgt außerdem, dass $\mathcal{G} \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{J})$ exakt ist. Also ist \mathcal{J} injektiv in $\mathfrak{Mod}(X)$. \square

Korollar 3.2 Für jeden topologischen Raum T hat die Kategorie $\mathfrak{Ab}(T)$ der abelschen Garben auf T genug Injektive.

Beweis: Es sei \mathcal{O}_T die konstante Garbe zur Gruppe \mathbb{Z} . Dann ist (T, \mathcal{O}_T) ein geringter Raum mit $\mathfrak{Mod}(T) = \mathfrak{Ab}(T)$. Also folgt die Behauptung aus Lemma 3.1. \square

Definition 3.3 Es sei T ein topologischer Raum, und

$$\Gamma(T, -) : \mathfrak{Ab}(T) \rightarrow \mathfrak{Ab}$$

der Funktor $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(T, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(T)$. Dieser ist linksexakt und kovariant. Wir schreiben $H^k(T, -) := R^k \Gamma(T, -)$ für die rechts abgeleiteten Funktoren. Insbesondere ist also $H^0(T, \mathcal{F}) = \Gamma(T, \mathcal{F})$.

Die $H^k(T, \mathcal{F})$ heißen **Kohomologiegruppen von \mathcal{F}** .

Ist X ein Schema und \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul, so definieren wir $H^k(X, \mathcal{F})$ auf dieselbe Weise, indem wir X als topologischen Raum und \mathcal{F} als Garbe abelscher Gruppen auffassen.

Wir wollen nun zeigen, dass die Kohomologiegruppen $H^k(X, \mathcal{F})$ für einen \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} mit den abgeleiteten Funktoren von Γ auf der Kategorie $\mathfrak{Mod}(X)$ übereinstimmen.

Definition 3.4 Eine Garbe \mathcal{F} auf dem topologischen Raum T heißt **welk**, falls für jede Inklusion $V \subset U$ offener Mengen die Restriktionsabbildung $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ surjektiv ist.

Beispiel: Jede konstante Garbe auf einem irreduziblen topologischen Raum T ist welk. (In einem irreduziblen topologischen Raum haben je zwei nicht-leere, offene Teilmengen einen nicht-leeren Schnitt, und jede offene Teilmenge ist irreduzibel, vgl. [AG], § 1.)

Lemma 3.5 Es sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathfrak{Ab}(T)$ für einen topologischen Raum T .

i) Ist \mathcal{F} welk, so ist für alle offenen Teilmengen $U \subset T$ die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$$

exakt.

ii) Sind \mathcal{F} und \mathcal{G} welk, so ist auch \mathcal{H} welk.

Beweis :

i) Sei $U \subset T$ eine offene Teilmenge. Wir müssen zeigen, dass

$$\beta_U : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$$

surjektiv ist. Sei $t \in \mathcal{H}(U)$. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas existiert ein maximales Paar (V, s) mit $V \subset U$ offen und $s \in \mathcal{G}(V)$, sodass $\beta_V(s) = t|_V$ gilt. Hier ist $(V, s) \geq (V', s')$, falls $V' \subset V$ und $s|_{V'} = s'$ gilt.

Angenommen $V \subsetneq U$. Dann wählen wir ein $x \in U \setminus V$ und eine offene Umgebung W um x sowie ein $r \in \mathcal{G}(W)$, so dass $\beta_W(r) = t|_W$ ist. Es folgt

$$\beta_{W \cap V}(s|_{W \cap V} - r|_{W \cap V}) = t|_{W \cap V} - t|_{W \cap V} = 0,$$

also liegt $s|_{W \cap V} - r|_{W \cap V}$ im Bild von $\mathcal{F}(W \cap V) \rightarrow \mathcal{G}(W \cap V)$. Da \mathcal{F} welk ist, existiert ein $f \in \mathcal{F}(W)$ mit $\alpha_W(f)|_{W \cap V} = s|_{W \cap V} - r|_{W \cap V}$.

Somit ist $s|_{W \cap V} = (r + \alpha_W(f))|_{W \cap V}$. Also kann man s und $r + \alpha_W(f)$ zu einem Element $s' \in \mathcal{G}(W \cup V)$ verkleben. Dieses erfüllt $\beta_{W \cup V}(s') = t$, denn dies kann man nach Restriktion auf W und V nachprüfen. Die Existenz von s' widerspricht allerdings der Maximalität von (V, s) . Also gilt in der Tat $V = U$, d.h. β_U ist surjektiv.

ii) Es seien $V \subset U$ offene Teilmengen von T . Dann haben wir nach i) das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F}(U) & \rightarrow & \mathcal{G}(U) & \rightarrow & \mathcal{H}(U) \rightarrow 0 \\ & & \text{res}_{\mathcal{F}} \downarrow & & \text{res}_{\mathcal{G}} \downarrow & & \text{res}_{\mathcal{H}} \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{F}(V) & \rightarrow & \mathcal{G}(V) & \rightarrow & \mathcal{H}(V) \rightarrow 0 \end{array}$$

Nach Voraussetzung sind $\text{res}_{\mathcal{F}}$ und $\text{res}_{\mathcal{G}}$ surjektiv. Also ist $\text{res}_{\mathcal{H}}$ surjektiv nach dem Fünferlemma 2.14.

□

Lemma 3.6 Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum. Dann sind alle injektiven \mathcal{O}_X -Moduln welche Garben.

Beweis : Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ betrachten wir $j_!(\mathcal{O}_{X|U})$. Hier ist für eine Garbe \mathcal{F} auf U die Garbe $j_!\mathcal{F}$ die sogenannte „Erweiterung von \mathcal{F} durch 0“, d. h. die Garbe zur Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V), & \text{falls } V \subseteq U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es sei \mathcal{J} ein injektiver \mathcal{O}_X -Modul und $V \subseteq U$ zwei offene Teilmengen von X . Dann ist $0 \rightarrow (j_V)_!\mathcal{O}_V \rightarrow (j_U)_!\mathcal{O}_U$ exakt, also folgt aus der Injektivität von \mathcal{J} , dass $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}((j_U)_!\mathcal{O}_U, \mathcal{J}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}((j_V)_!\mathcal{O}_V, \mathcal{J})$ surjektiv ist. Nun ist aber $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}((j_U)_!\mathcal{O}_U, \mathcal{J}) \cong \mathcal{J}(U)$ vermöge der Abbildung $\mathcal{J}(U) \rightarrow \text{Hom}((j_U)_!\mathcal{O}_U, \mathcal{J}), s \mapsto f_s$, wobei $(f_s)_V : (j_U)_!\mathcal{O}_U(V) \rightarrow \mathcal{J}(V)$ für $V \subset U$ offen durch $a \mapsto as|_V$ gegeben ist. Daraus folgt die Behauptung. \square

Proposition 3.7 (Welke Garben sind azyklisch)

\mathcal{F} sei eine welke Garbe auf dem topologischen Raum T . Dann ist $H^k(T, \mathcal{F}) = 0$ für alle $k > 0$.

Beweis : Wir betten \mathcal{F} in ein injektives Objekt \mathcal{J} in $\text{Ab}(T)$ ein, und setzen $\mathcal{H} = \mathcal{J}/\mathcal{F}$.

Da \mathcal{F} welk ist, ist nach Lemma 3.5 i) die Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F}(T) \rightarrow \mathcal{J}(T) \rightarrow \mathcal{H}(T) \rightarrow 0$ exakt.

Da \mathcal{J} injektiv ist, gilt $H^k(T, \mathcal{J}) = 0$ für alle $k > 0$. Aus der langen exakten Kohomologiesequenz folgt somit $H^1(T, \mathcal{F}) = 0$ und $H^k(T, \mathcal{F}) \simeq H^{k-1}(T, \mathcal{H})$ für $k \geq 2$. Nach Lemma 3.6 ist \mathcal{J} welk, also ist nach Lemma 3.5 ii) auch \mathcal{H} welk. Jetzt folgt die Behauptung per Induktion. \square

Nach Satz 2.23 kann man Kohomologie mit azyklischen Auflösungen berechnen, also können wir die $H^k(T, \mathcal{F})$ mit welchen Auflösungen berechnen.

Korollar 3.8 Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum. Dann stimmen die abgeleiteten Funktoren von $\Gamma(X, -) : \mathfrak{Mod}(X) \rightarrow \mathfrak{Ab}$ auf der Kategorie der \mathcal{O}_X -Moduln mit den $H^k(X, -)$, also den abgeleiteten Funktoren von $\Gamma(X, -) : \mathfrak{Ab}(X) \rightarrow \mathfrak{Ab}$ auf der Kategorie der Garben abelscher Gruppen überein.

Beweis : Um $R^k\Gamma(X, -) : \mathfrak{Mod}(X) \rightarrow \mathfrak{Ab}$ zu berechnen, benutzen wir injektive Auflösungen in $\mathfrak{Mod}(X)$. Diese sind nach Lemma 3.6 welk, somit nach Proposition 3.7 azyklisch für $H^k(X, -)$. Also berechnen wir nach Satz 2.23 in der Tat die $H^k(X, -)$. \square

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum und $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Dann ist für alle \mathcal{O}_X -Moduln \mathcal{F} die Gruppe $\Gamma(X, \mathcal{F})$ ein A -Modul. Da wir die Kohomologie $H^k(X, \mathcal{F})$ mit injektiven Auflösungen in $\mathfrak{Mod}(X)$ berechnen können, sind alle $H^k(X, \mathcal{F})$ A -Moduln und die Abbildungen in den langen exakten Sequenzen A -Modul-Homomorphismen.

Ist X ein Schema über $\text{Spec}A$, so sind also alle $H^k(X, \mathcal{F})$ insbesondere A -Moduln.

Lemma 3.9 (*Garbenkohomologie vertauscht mit direkten Summen*)

Ist $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Garben abelscher Gruppen auf T , so ist

$$H^k(T, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i) \simeq \bigoplus_{i \in I} H^k(T, \mathcal{F}_i).$$

Beweis : Wir wählen eine injektive Auflösung $0 \rightarrow \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{J}_i^\bullet$ für jedes \mathcal{F}_i in der Kategorie $\mathfrak{Ab}(T)$. Dann ist nach Lemma 3.6 die Garbe \mathcal{J}_i^k welk für alle $k \geq 0$. Also ist auch $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{J}_i^k$ welk. Somit ist

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{J}_i^k$$

eine welke und nach Proposition 3.7 somit azyklische Auflösung von $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Da der globale Schnittfunktor $\Gamma(T, -)$ mit beliebigen direkten Summen vertauscht, folgt daraus mit Satz 2.23 die Behauptung. \square

Erinnerung (siehe [AG], Definition 1.12). Ein topologischer Raum heißt **noethersch**, falls jede absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen stationär wird.

Ist X ein noetherscher topologischer Raum, so definieren wir die Dimension von X als

$$\dim X = \max\{n : \exists \text{ Kette } Z_0 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n \text{ irreduzibler abgeschlossener Teilmengen in } X\}$$

Noethersche Schemata sind noethersche topologische Räume.

Satz 3.10 (Grothendiecks Verschwindungssatz) Sei X ein noetherscher topologischer Raum der Dimension n . Dann gilt für alle Garben \mathcal{F} abelscher Gruppen auf X :

$$H^k(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{für alle } k > n.$$

Beweis : (Skizze): Ist A eine gerichtete Menge und ist für jedes $\alpha \in A$ eine Garbe abelscher Gruppen \mathcal{F}_α auf X gegeben, dann sei $\varinjlim \mathcal{F}_\alpha$ die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(U).$$

Sind alle \mathcal{F}_α welk, dann ist auch $\varinjlim \mathcal{F}_\alpha$ welk (Übungsaufgabe). Ferner vertauscht der direkte Limes mit Garbenkohomologie:

$$\varinjlim_{\alpha} H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \varinjlim_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha).$$

Das zeigt man mit Hilfe universeller δ -Funktoren (Übungsaufgabe, siehe [Ha], Proposition III.2.9.)

Eine Induktion über die Anzahl der irreduziblen Komponenten zeigt, dass wir X irreduzibel annehmen können. Jetzt führen wir Induktion nach $n = \dim X$.

Angenommen, $n = 0$. Dann hat X als irreduzibler nulldimensionaler Raum nur die offenen Mengen \emptyset und X und der globale Schnittfunktor ist exakt.

Nun sei X irreduzibel der Dimension n und wir nehmen an, die Behauptung gelte in Dimension $< n$. Es sei $B = \bigcup_{U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U)$ und

$$A = \{\alpha \subset B : \alpha \text{ endlich}\}$$

Für jedes $\alpha \in A$ sei \mathcal{F}_α die Untergarbe von \mathcal{F} , die von allen S in α erzeugt ist (diese sind im allgemeinen auf verschiedenen offenen Mengen definiert und man definiert \mathcal{F} als Garbe zu der von α erzeugten Prägarbe).

Dann ist $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}_\alpha$.

Es genügt zu zeigen, dass $H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) = 0$ ist für alle $i > \dim X$.

Mit Induktion über die Anzahl der Elemente in α führt man diese Behauptung auf den Fall zurück, dass \mathcal{F}_α von einem $s \in \mathcal{F}(U)$ erzeugt wird. Dann gibt es also einen surjektiven Garbenmorphismus

$$i_!(\mathbb{Z}_U) \rightarrow \mathcal{F},$$

wobei \mathbb{Z}_U die konstante Garbe auf U ist und $i_!$ wie im Beweis von Lemma 3.6 zu $i : U \hookrightarrow X$ definiert ist. Sei \mathcal{R} der Kern dieser Abbildung. Mit der langen exakten Kohomologiesequenz sieht man, dass es genügt, die Behauptung für $i_!(\mathbb{Z}_U)$ und für \mathcal{R} zu zeigen.

Ist $\mathcal{R} \neq 0$, so sei d die kleinste positive Zahl, die in einer der Halme $\mathcal{R}_x \subset \mathbb{Z}$ vorkommt. Dann gibt es eine offene Teilmenge $V \neq \emptyset$ von U mit

$$\mathcal{R}|_V \simeq d\mathbb{Z}_V,$$

also eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow i\mathbb{Z}_V \xrightarrow{d} \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/i\mathbb{Z}_V \rightarrow 0$$

für $i : V \hookrightarrow X$, sodass der Halm von $\mathcal{R}/i\mathbb{Z}_V$ auf V verschwindet. Die abgeschlossene Teilmenge $Y = X \setminus V$ von X hat Dimension $< n$. Also folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass $H^i(\mathcal{R}/i\mathbb{Z}_V) = 0$ ist für alle $i \geq n$. Es genügt also, die Behauptung für Garben der Form $i\mathbb{Z}_V$ zu zeigen. Das geht mit einem direkten Argument. \square

4 Quasikohärente Modulgarben

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Garben von \mathcal{O}_X -Moduln auf einem Schema X .

Sind \mathcal{F} und \mathcal{G} zwei \mathcal{O}_X -Moduln, so sei für jede offene Teilmenge $U \subset X$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U\text{-Modulgarben}}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U).$$

Das definiert eine Garbe, die wir mit $\mathfrak{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ bezeichnen. $\mathfrak{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ist in natürlicher Weise ein \mathcal{O}_X -Modul (Übungsaufgabe).

Außerdem definieren wir das Tensorprodukt $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ als die Garbe, die zur Prägarbe

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

assoziiert ist. Es ist $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$ für alle $x \in X$.

Eine Garbe von Idealen auf X ist ein \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{J} , so dass für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ die Menge $\mathcal{J}(U)$ ein Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$ ist.

Es sei nun $X = \mathrm{Spec} A$ ein affines Schema. Wir wollen zu jedem A -Modul M einen \mathcal{O}_X -Modul \widetilde{M} konstruieren.

Definition 4.1 Es sei M ein A -Modul. Für jedes $f \in A$ definieren wir

$$\widetilde{M}(D(f)) = M_f,$$

wobei $M_f = S^{-1}M$ für $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ die Lokalisierung von M nach f ist. Für eine beliebige offene Teilmenge $U \subset \text{Spec}A$ wählen wir eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ mit $f_i \in A$ und setzen

$$\widetilde{M}(U) = \{(s_i)_{i \in I} : s_i \in M_{f_i} \text{ mit } s_i \mid_{D(f_i f_j)} = s_j \mid_{D(f_i f_j)} \text{ für alle } i, j \in I\}$$

Diese Definition ist analog zur Definition der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\text{Spec}A}$, siehe [AG], § 4. Genau wie für $\mathcal{O}_{\text{Spec}A}$ prüft man noch, dass $\widetilde{M}(U)$ bis auf einen kanonischen Isomorphismus nicht von der Wahl der offenen affinen Überdeckung abhängt.

Beispiel: $\widetilde{A} = \mathcal{O}_{\text{Spec}A}$.

Zusammen mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen ist \widetilde{M} eine Garbe auf $\text{Spec}A$.

Lemma 4.2 Sei $X = \text{Spec}A$ ein affines Schema.

- i) \widetilde{M} ist ein \mathcal{O}_X -Modul.
- ii) Für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec}A$ ist der Halm $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}}$ isomorph zur Lokalisierung $M_{\mathfrak{p}}$.
- iii) $\Gamma(X, \widetilde{M}) = M$.

Beweis :

- i) Für jedes $f \in A$ ist M_f in natürlicher Weise ein A_f -Modul. Daraus folgt nach Konstruktion die Behauptung.
- ii) Es ist $M_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} M_f$. Nach Konstruktion ist dies der Halm von \widetilde{M} in \mathfrak{p} .
- iii) Da $X = \text{Spec}A = D(1)$ ist, folgt

$$\Gamma(X, \widetilde{M}) = \widetilde{M}(X) = M_1 = M.$$

□

Wir brauchen nun noch Pushforward und Pullback für \mathcal{O}_X -Moduln.

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. Falls \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul ist, so ist $f_*\mathcal{F}$ ein $f_*\mathcal{O}_X$ -Modul, denn für alle $U \subset X$ offen ist $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

Da f einen Morphismus $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ liefert, ist $f_*\mathcal{F}$ auch ein \mathcal{O}_Y -Modul. Die Garbe $f_*\mathcal{F}$ zusammen mit dieser \mathcal{O}_Y -Modul-Struktur heißt direktes Bild von \mathcal{F} unter f .

Umgekehrt sei \mathcal{G} ein \mathcal{O}_Y -Modul. Dann ist $f^{-1}\mathcal{G}$ ein $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -Modul. (Erinnerung: $f^{-1}\mathcal{G}$ ist die Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto \lim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V)$.) f liefert einen Garbenmorphismus $f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$.

Es sei ferner $f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. Dies ist ein \mathcal{O}_X -Modul über den zweiten Faktor des Tensorprodukts. $f^*\mathcal{G}$ heißt Pullback von \mathcal{G} unter f .

Auf folgende Weisen passen unsere Operationen auf \mathcal{O}_X -Moduln gut mit bekannten Operationen auf Moduln zusammen:

Lemma 4.3 *Es sei $\varphi : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und $h : X = \text{Spec} B \rightarrow Y = \text{Spec} A$ der zugehörige Morphismus von Schemata. Dann gilt*

i) *Die Zuordnung $M \rightarrow \widetilde{M}$ ist ein exakter, volltreuer Funktor von der Kategorie der A -Moduln in die Kategorie der \mathcal{O}_X -Moduln.*

ii) *Sind M und N zwei A -Moduln, so ist*

$$(\widetilde{M \otimes_A N}) = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}.$$

iii) *Ist $\{M_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie von A -Moduln, so ist*

$$\widetilde{\bigoplus_{i \in I} M_i} = \bigoplus_{i \in I} \widetilde{M}_i.$$

iv) *Für jeden B -Modul N ist*

$$h_*\widetilde{N} = ({}_A N)^\sim,$$

wobei ${}_A N$ bedeutet, dass man N via $\varphi : A \rightarrow B$ als A -Modul auffasst.

v) *Für jeden A -Modul M ist*

$$h^*\widetilde{M} = \widetilde{M \otimes_A B}.$$

Beweis :

- i) Ein A -Modulhomomorphismus $\psi : M \rightarrow N$ liefert für jedes $f \in A$ einen A_f -Modulhomomorphismus $M_f \rightarrow N_f$. Daraus erhalten wir einen Morphismus von \mathcal{O}_X -Moduln $\tilde{\psi} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$. Also ist $M \mapsto \tilde{M}$ ein Funktor. Dieser ist exakt, da er exakt auf den Halmen ist. Nach Lemma 4.2 sind die Halme von \tilde{M} ja einfach Lokalisierungen in Primidealen. Wir betrachten für A -Moduln M und N den Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N}). \\ \psi &\mapsto \tilde{\psi} \end{aligned}$$

Für die Volltreueheit müssen wir zeigen, dass dieser bijektiv ist. Dazu geben wir folgendermaßen eine Umkehrabbildung an. Ist $g : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ ein Homomorphismus von \mathcal{O}_X -Moduln, so erhalten wir durch

$$M = \tilde{M}(X) \xrightarrow{g_X} \tilde{N}(X) = N$$

einen $A = \mathcal{O}_X(X)$ -Modulhomomorphismus. Es ist klar, dass für jedes $\psi \in \text{Hom}(M, N)$ gilt $\tilde{\psi}_x = \psi$. Starten wir mit einem $g \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N})$, so müssen wir $\tilde{g}_X = g$ zeigen. Dazu genügt es zu zeigen, dass diese beiden Garbenmorphisme auf allen $D(f)$ für $f \in A$ gleich sind. Da g ein \mathcal{O}_X -Modulhomomorphismus ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}(X) = M & \xrightarrow{g_X} & N = \tilde{N}(X) \\ \text{res}_{XD(f)} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{XD(f)} \\ \tilde{M}(D(f)) = M_f & \xrightarrow{g_{D(f)}} & N_f = \tilde{N}(D(f)). \end{array}$$

Daraus folgt für alle $\frac{m}{f^k} \in M_f$:

$$\begin{aligned} g_{D(f)}\left(\frac{m}{f^k}\right) &= \frac{1}{f^k} g_{D(f)}\left(\frac{m}{1}\right) = \frac{1}{f^k} g_X\left(\frac{m}{1}\right) \\ &= (\tilde{g}_X)_{D(f)}\left(\frac{m}{f^k}\right). \end{aligned}$$

Also ist die Abbildung $\psi \mapsto \tilde{\psi}$ in der Tat ein Isomorphismus.

- ii) Für alle $f \in A$ und jeden A -Modul L gilt $L_f = L \otimes_A A_f$ (Übungsaufgabe). Also gilt

$$\widetilde{M \otimes_A N}(D(f)) = (M \otimes_A N) \otimes_A A_f \simeq (M \otimes_A A_f) \otimes_{A_f} (N \otimes_A A_f)$$

nach [AG], Proposition 10.2.

Also folgt $(\widetilde{M \otimes_A N})D(f) \simeq \tilde{M}(D(f)) \otimes_{A_f} \tilde{N}(D(f))$, und dieser Isomorphismus ist mit den Restriktionsabbildungen verträglich. Das liefert einen Morphismus der Prägarbe

$$U \mapsto \tilde{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \tilde{N}(U)$$

in die Garbe $\widetilde{M \otimes_A N}$. Definitionsgemäß ist $\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}$ die Garbifizierung der Tensorprodukt-Prägarbe. Also existiert aufgrund der universellen Eigenschaft der Garbifizierung ein Garbenmorphismus

$$\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \rightarrow \widetilde{M \otimes_A N}.$$

Da sich bei der Garbifizierung die Halme nicht ändern, ist dies auf den Halmen ein Isomorphismus, also überhaupt ein Isomorphismus.

iii) ist klar.

iv) Für jedes $f \in A$ ist

$$\begin{aligned} (h_* \tilde{N})(D(f)) &= \tilde{N}(h^{-1}D(f)) \\ &= \tilde{N}(D(\varphi(f))) \\ &= N_{\varphi(f)} \\ &= ({}_A N)_f \end{aligned}$$

v) Für jedes $g \in B$ ist $(M \otimes_A B)_g = M \otimes_A B_g$, denn $M \otimes_A B$ ist ein B -Modul über dem zweiten Faktor.

Die Restriktionsabbildungen liefern Abbildungen

$$\tilde{M}(Y) = M \rightarrow (h^{-1}\tilde{M})(D(g))$$

und

$$\mathcal{O}_Y(Y) = A \rightarrow (h^{-1}\mathcal{O}_Y)(D(g)).$$

Also erhalten wir einen Homomorphismus von B_g -Moduln

$$\begin{aligned} (\widetilde{M \otimes_A B})(D(g)) = M \otimes_A B_g &\rightarrow (h^{-1}\tilde{M})(D(g)) \otimes_{(h^{-1}\mathcal{O}_Y)(D(g))} B_g \\ &\rightarrow (h^*\tilde{M})(D(g)), \end{aligned}$$

wobei die letzte Abbildung von dem kanonischen Morphismus der Tensorproduktprägarbe in ihre Garbifizierung kommt. Diese verkleben sich zu einem Garbenmorphismus

$$\widetilde{M \otimes_A B} \rightarrow h^*\tilde{M},$$

der auf den Halmen ein Isomorphismus ist, da für jedes Primideal $\mathfrak{q} \in \text{Spec} B$ gilt

$$\begin{aligned} (h^* \tilde{M})_{\mathfrak{q}} &= (h^{-1} \tilde{M}_{\mathfrak{q}} \otimes (h^{-1} \mathcal{O}_y)_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}} \mathcal{O}_{X, \mathfrak{q}} \\ &= (\tilde{M})_{h(\mathfrak{q})} \otimes_{\mathcal{O}_{y, h(\mathfrak{q})}} \mathcal{O}_{X, \mathfrak{q}} \\ &= M_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})} \otimes_{A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})}} B_{\mathfrak{q}}. \end{aligned}$$

Dies ist isomorph zu $(M \otimes_A B)_{\mathfrak{q}}$. (Übungsaufgabe).

□

Jetzt können wir definieren:

Definition 4.4 Sei X ein beliebiges Schema. Ein \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} heißt **quasi-kohärent**, falls X eine offene affine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i = \text{Spec} A_i$ besitzt, so dass für alle $i \in I$

$$\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \tilde{M}_i$$

für einen A_i -Modul M_i gilt.

\mathcal{F} heißt **kohärent**, falls alle diese M_i endlich erzeugte A_i -Moduln sind. Hier und in Zukunft fassen wir $\mathcal{F}|_{U_i}$ als \mathcal{O}_{U_i} -Modul auf, d.h. es gilt $\mathcal{F}|_{U_i} = j_* \mathcal{F}$ für die Inklusion $j : U_i \hookrightarrow X$.

Beispiel

- 1) \mathcal{O}_X ist kohärent.
- 2) Ist $X = \text{Spec} A$ affin und $Y \xrightarrow{i} X$ eine abgeschlossene Immersion, so gibt es nach [AG], Proposition 7.4 ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ mit $Y \simeq \text{Spec} A/\mathfrak{a}$. Aus $\mathcal{O}_Y = \widetilde{A/\mathfrak{a}}$ folgt mit Lemma 4.3

$$i_* \mathcal{O}_Y \cong (A/\mathfrak{a})^\sim,$$

wobei wir A/\mathfrak{a} als A -Modul auffassen. Also ist $i_* \mathcal{O}_Y$ kohärent.

- 3) Sei X ein irreduzibles Schema und U, V zwei offene Teilmengen, so dass $V \not\subset U$ und $V = \text{Spec} A$ affin ist. Dann ist der \mathcal{O}_X -Modul $j_! \mathcal{O}_U$ nicht quasi-kohärent. Es gilt nämlich $\Gamma(V, j_! \mathcal{O}_U) = 0$, aber $j_! \mathcal{O}_{U|U \cap V} \neq 0$. Also kann $j_! \mathcal{O}_U|_V$ nicht von der Form \tilde{M} für einen A -Modul M sein.

Wir wollen nun zeigen, dass auf affinen Schemata die quasi-kohärenten Moduln gerade die \tilde{M} sind. Dazu brauchen wir folgendes Lemma:

Lemma 4.5 *Es sei $X = \text{Spec} A$ affin und \mathcal{F} quasi-kohärent auf X . Ferner sei $f \in A$ und $D(f) \simeq \text{Spec} A_f$ die zugehörige offene Teilmenge von X . Dann gilt*

- i) *Für alle $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ mit $\text{res}_{XD(f)} s = 0$ gilt $f^n s = 0$ für ein $n > 0$.*
- ii) *Für alle $t \in \Gamma(D(f), \mathcal{F})$ gibt es ein $n > 0$, so dass $f^n t$ sich zu einem $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ fortsetzen lässt.*

Jede offene Teilmenge $\text{Spec} A \simeq U \subset X$ mit $\mathcal{F}|_U \simeq \widetilde{M}$ können wir durch Mengen der Form $D(g_i)$ mit $g_i \in A$ überdecken. Die Inklusion $j : D(g_i) \rightarrow U$ entspricht einem Ringhomomorphismus $B \rightarrow A_{g_i}$. Nach Lemma 4.3 ist $\mathcal{F}|_{D(g_i)} = j^* \widetilde{M} = \widetilde{M \otimes_B A_{g_i}}$. Also können wir den gesamten Raum X mit Mengen der Form $D(g_i)$ überdecken, so dass $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \simeq \widetilde{M_i}$ für einen geeigneten Modul M_i ist. Da X affin, also quasi-kompakt ist, reichen endlich viele solcher $D(g_i)$ aus.

- i) Gegeben sei $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ mit $\text{res}_{XD(f)} s = 0$. Für alle i sei $s_i = \text{res}_{XD(g_i)} s \in \Gamma(D(g_i), \mathcal{F}) = M_i$. Nun ist $D(f) \cap D(g_i) = D(fg_i)$ und $\Gamma(D(fg_i), \mathcal{F}_i) = (M_i)_f$ nach Lemma 3.3.

Also ist das Bild von s_i in $(M_i)_f$ trivial, d. h. $f^{n_i} s_i = 0$ für ein $n_i > 0$. Da nur endlich viele i im Spiel sind, gibt es ein n mit $f^n s_i = 0$ für alle i . Mit dem ersten Garbenaxiom folgt $f^n s = 0$.

- ii) Gegeben sei $t \in \Gamma(D(f), \mathcal{F})$. Dann liegt $t|_{D(fg_i)} \in \Gamma(D(fg_i), \mathcal{F}) = (M_i)_f$. Also existiert ein $n_i \geq 0$, so dass $f^{n_i} t|_{D(fg_i)} = t_i|_{D(fg_i)}$ für ein $t_i \in M_i = \Gamma(D(g_i), \mathcal{F})$ ist. Da nur endlich viele i im Spiel sind, können wir wieder $n_i = n$ für alle i annehmen.

Nun ist $t_i|_{D(g_i g_j)} - t_j|_{D(g_i g_j)}$ ein Element in $\Gamma(D(g_i g_j), \mathcal{F})$, dessen Einschränkung auf $D(fg_i g_j)$ null ist. Nach i) existiert also ein $m_{ij} > 0$ mit

$$f^{m_{ij}} \cdot t_i|_{D(g_i g_j)} = f^{m_{ij}} \cdot t_j|_{D(g_i g_j)}.$$

Wieder können wir $m_{ij} = m$ für alle i, j annehmen.

Dann verkleben sich die $f^m t_i \in \Gamma(D(g_i), \mathcal{F})$ zu einem $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$. Da $s|_{D(fg_i)} = f^m t_i|_{D(fg_i)} = f^{m+n} t|_{D(fg_i)}$ gilt, folgt $s|_{D(f)} = f^{m+n} t$.

Satz 4.6 *Der \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} ist genau dann quasi-kohärent, wenn es für jede offene affine Teilmenge $U = \text{Spec} A$ von X einen A -Modul M gibt mit $\mathcal{F}|_U \simeq \widetilde{M}$. Falls X noethersch ist, so ist \mathcal{F} genau dann kohärent, wenn eine entsprechende Bedingung mit einem endlich erzeugten A -Modul M gilt.*

Beweis : Sei $U = \text{Spec}A \subset X$ offen affin. Wie zu Beginn des Beweises von Lemma 3.6 zeigt man, dass $\mathcal{F}|_U$ ebenfalls quasi-kohärent ist. Also können wir $X = \text{Spec}A$ affin annehmen. Gesucht wird ein M mit $\mathcal{F} = \widetilde{M}$. Sei $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ (nach Lemma 4.2 ist das der richtige Kandidat). Für jedes $f \in A$ betrachten wir den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \Gamma(D(f), \widetilde{M}) &= M_f \rightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F}) \\ \frac{m}{f^n} &\longmapsto \frac{1}{f^n} \text{res}_{XD(f)}(m). \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.5 ist dies ein Isomorphismus. Also erhalten wir einen Garbenisomorphismus $\widetilde{M} \rightarrow \mathcal{F}$.

Ist X noethersch und \mathcal{F} kohärent, so ist zusätzlich zu zeigen: Ist A noethersch, $D(f_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von $\text{Spec}A$ und M ein A -Modul, so dass alle A_{f_i} -Moduln M_{f_i} endlich erzeugt sind, dann ist auch M ein endlich erzeugter A -Modul. Das lassen wir als Übungsaufgabe. \square

Lemma 4.7 Kerne, Kokerne und Bilder von Morphismen quasi-kohärenter Garben auf X sind quasi-kohärent.

Auf noetherschen Schemata gilt das auch für kohärente Garben.

Beweis : Es genügt, die Behauptungen auf einer offenen affinen Überdeckung zu zeigen. Also können wir annehmen, dass $X = \text{Spec}A$ ist. Jede quasi-kohärente Garbe ist dann nach Satz 4.6 von der Form \widetilde{M} . Nach Lemma 4.3 ist der Funktor $M \mapsto \widetilde{M}$ auf X exakt, also gilt für einen A -Modulhomomorphismus $f : M \rightarrow N : \ker \widetilde{f} = \widetilde{(\ker f)}$, $\text{Im} \widetilde{f} = \widetilde{\text{Im} f}$ und $\text{koker} \widetilde{f} = \widetilde{\text{koker} f}$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Proposition 4.8 Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein Schemamorphismus.

- i) Ist \mathcal{G} ein quasi-kohärenter \mathcal{O}_Y -Modul, so ist $f^*\mathcal{G}$ ein quasi-kohärenter \mathcal{O}_X -Modul.
- ii) Sind X, Y noethersch und \mathcal{G} kohärent, so ist $f^*\mathcal{G}$ kohärent.
- iii) Ist X quasi-kompakt und separiert, so ist $f_*\mathcal{F}$ quasi-kohärent für jeden quasi-kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} .

Beweis : i) + ii) Wir überdecken X mit offenen affinen Teilmengen U_i , so dass $f(U_i)$ in einer offenen affinen Teilmenge von Y liegt. Damit folgt die Behauptung aus Satz

4.6 und Lemma 4.3 v).

iii) Ohne Einschränkung ist Y affin. Als noethersches Schema ist X quasi-kompakt, besitzt also eine endliche Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ aus offenen affinen Teilmengen. Da X separiert ist, sind alle $U_i \cap U_j$ affin (Übungsaufgabe).

Nach den Garbenaxiomen für \mathcal{F} ist die folgende Sequenz von Garben auf Y exakt:

$$0 \rightarrow f_*\mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_i (f_i)_*(\mathcal{F}|_{U_i}) \rightarrow \bigoplus_{i,j} (f_{ij})_*(\mathcal{F}|_{U_i \cap U_j})$$

Hier sind $f_i : U_i \rightarrow Y$ und $f_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow Y$ die von f induzierten Morphismen. Die Abbildungen in der Sequenz werden jeweils durch die Restriktionsabbildungen gegeben.

Nun sind $\mathcal{F}|_{U_i}$ und $\mathcal{F}|_{U_i \cap U_j}$ quasi-kohärent auf den affinen Schemata U_i bzw. $U_i \cap U_j$. Also sind nach Lemma 4.3 iv) der mittlere und der rechte Eintrag in unserer Sequenz quasi-kohärent. Mit Lemma 4.7 folgt das auch für den linken Eintrag. \square

Vorsicht: Ist \mathcal{F} kohärent, so ist $f_*\mathcal{F}$ im allgemeinen nicht kohärent! Ein tiefer Satz von Grothendieck sagt, dass dies immerhin für eigentliche Morphismen f gilt.

Wir wollen nun die Kohomologie quasi-kohärenter Modulgarben untersuchen. Dazu untersuchen wir zunächst für einen injektiven Modul I über einem noetherschen Ring A die Modulgarbe \tilde{I} .

Lemma 4.9 *Es sei A ein noetherscher Ring und I ein injektiver A -Modul. Dann ist für jedes $f \in A$ die natürliche Abbildung*

$$\begin{aligned} \Theta : I &\rightarrow I_f \\ x &\mapsto \frac{x}{1} \end{aligned}$$

surjektiv.

Beweis : Für alle $i > 0$ betrachten wir $\mathfrak{b}_i := \text{Ann}_A(f^i) = \{a \in A : af^i = 0\}$

Die aufsteigende Idealkette

$$\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2 \subset \mathfrak{b}_3 \subset \dots$$

wird stationär, da A noethersch ist. Also existiert ein $r \geq 0$ mit $\mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}_{r+1} = \dots$. Sei $y = x/f^r \in I_f$ mit $x \in I$ und $n \geq 0$. Wir definieren eine A -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} (f^{n+r}) &\rightarrow I \\ af^{n+r} &\mapsto af^r x. \end{aligned}$$

Das ist wohldefiniert, da $\text{Ann}_A(f^{n+r}) = \mathfrak{b}_{n+r} = \mathfrak{b}_r = \text{Ann}_A(f^r)$ gilt.

Da I injektiv ist, können wir diese Abbildung zu einem A -Modulhomomorphismus

$$\psi : A \rightarrow I$$

fortsetzen. Wir setzen $\psi(1) = z$. Dann ist $f^{n+r}z = \psi(f^{n+r}) = f^r x$, woraus $\Theta(z) = \frac{z}{1} = \frac{x}{f^n} = y$ folgt. Also ist Θ in der Tat surjektiv. \square

Lemma 4.10 *Ein A -Modul I ist genau dann injektiv, wenn es für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset A$ und jeden A -Modulhomomorphismus $\mathfrak{b} \rightarrow I$ einen A -Modulhomomorphismus $\varphi : A \rightarrow I$ gibt, so dass*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{b} & \subset & A \\ \downarrow & & \searrow \varphi \\ I & & \end{array}$$

kommutiert.

Beweis : „ \Rightarrow “ : ist klar nach Definition injektiver Moduln.

„ \Leftarrow “ : Sei $0 \rightarrow M \rightarrow N$ eine exakte Sequenz von A -Moduln und $f : M \rightarrow I$ ein A -Modulhomomorphismus. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximaler A -Untermodul N' von N , der eine Fortsetzung $g : N' \rightarrow I$ von f zulässt. Angenommen, es existiert ein $n \in N \setminus N'$. Dann betrachten wir das Ideal

$$\mathfrak{b} = \{a \in A : an \in N'\}$$

in A . Nach Voraussetzung hat

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{b} & \rightarrow & N' \xrightarrow{g} I \\ a & \mapsto & an \end{array}$$

eine Fortsetzung $\varphi : A \rightarrow I$. Es sei N'' der von N' und n erzeugte Untermodul von N und $h : N'' \rightarrow I$ der A -Modulhomomorphismus mit $h|_{N'} = g$ und $h(an) = \varphi(a)$. Dieser ist wohldefiniert, da jedes Element in $N' \cap An$ nach Definition von \mathfrak{b} von der Form an für ein $a \in \mathfrak{b}$ ist. Also ist $\varphi(a) = g(an)$.

Die Existenz von (N'', h) widerspricht der Maximalität von N' . Also folgt $N' = N$ und damit unsere Behauptung. \square

Proposition 4.11 *Es sei A noethersch und I ein injektiver A -Modul. Dann ist \tilde{I} eine welke Garbe auf $X = \text{Spec}A$.*

Beweis : Für eine beliebige Garbe \mathcal{G} auf X nennen wir die Teilmenge

$$\text{supp}\mathcal{G} = \{x \in X : \mathcal{G}_x \neq 0\}$$

von X den Träger von \mathcal{G} .

Sei $Y \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge von X . Wir sagen, Y hat die Eigenschaft \mathcal{P} , falls für jeden injektiven A -Modul I mit $\text{supp } \tilde{I} \subset Y$ die Garbe \tilde{I} welk ist. Wir zeigen die Behauptung mit noetherscher Induktion, indem wir folgende Implikation nachweisen:

(*) Falls jede echte abgeschlossene Teilmenge Y' von Y die Eigenschaft \mathcal{P} hat, so hat auch Y die Eigenschaft \mathcal{P} .

Daraus folgt die Behauptung mit folgendem Argument. Da X noethersch ist, existiert, wenn die Behauptung nicht stimmt, eine minimale abgeschlossene Teilmenge Y , die \mathcal{P} nicht erfüllt. Jedes abgeschlossene $Y' \subset Y$ erfüllt also \mathcal{P} , also muss nach dem Induktionsschluss auch Y die Eigenschaft \mathcal{P} haben. Das ist ein Widerspruch.

Also müssen wir (*) zeigen. Sei I ein injektiver A -Modul mit $\text{supp } \tilde{I} \subset Y$. Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Um zu zeigen, dass \tilde{I} welk ist, genügt es zu zeigen, dass $\text{res}: \Gamma(X, \tilde{I}) = I \rightarrow \Gamma(U, \tilde{I})$ surjektiv ist.

Falls $U \cap Y = \emptyset$, so ist $\tilde{I}|_U = 0$ und die Surjektivität klar. Andernfalls existiert ein $f \in A$ mit $D(f) \subset U$ und $D(f) \cap Y \neq \emptyset$. Es sei $Z = X \setminus D(f)$. Wir definieren

$$\Gamma_Z(U, \tilde{I}) = \{s \in \Gamma(U, \tilde{I}) : s_x = 0 \text{ für alle } x \notin Z\}$$

und analog

$$\Gamma_Z(X, \tilde{I}) = \{s \in \Gamma(X, \tilde{I}) : s_x = 0 \text{ für alle } x \notin Z\}.$$

Dann haben wir folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & I_f & & \\ \parallel & & \parallel & & \\ \Gamma(X, \tilde{I}) & \xrightarrow{\text{res}} & \Gamma(U, \tilde{I}) & \xrightarrow{\text{res}} & \Gamma(D(f), \tilde{I}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \Gamma_Z(X, \tilde{I}) & \xrightarrow{\text{res}} & \Gamma_Z(U, \tilde{I}) & & \end{array}$$

Nach Lemma 4.9 ist die obere horizontale Abbildung surjektiv.

Für jedes $s \in \Gamma(U, \tilde{I})$ finden wir also ein $t \in \Gamma(X, \tilde{I})$ mit $t|_{D(f)} = s|_{D(f)}$. Dann ist $t|_U - s \in \Gamma_Z(U, \tilde{I})$. Die Surjektivität von $\text{res}: \Gamma(X, \tilde{I}) \rightarrow \Gamma(U, \tilde{I})$ folgt also aus der Surjektivität von $\text{res}: \Gamma_Z(X, \tilde{I}) \rightarrow \Gamma_Z(U, \tilde{I})$.

Wir zeigen nun, dass

$$J = \Gamma_Z(X, \tilde{I}) \stackrel{4.5}{=} \{s \in I : \exists n > 0 \text{ mit } f^n s = 0\} \subset I$$

ebenfalls ein injektiver A -Modul ist. Nach Lemma 4.10 genügt es dafür, ein Ideal $\mathfrak{b} \subset A$ und einen A -Modulhomomorphismus $\varphi: \mathfrak{b} \rightarrow J$ zu betrachten.

Da \mathfrak{b} endlich erzeugt ist, existiert ein $n > 0$ mit $\varphi(f^n \mathfrak{b}) = f^n \varphi(\mathfrak{b}) = 0$. Jetzt brauchen wir das Artin-Rees-Lemma, das besagt, dass die Filtrierungen $f^n \mathfrak{b}$ und $(f^n) \cap \mathfrak{b}$ des Ideals \mathfrak{b} eine beschränkte Differenz haben (siehe [AM], Theorem 10.11).

Also existiert ein $m \geq n$ mit

$$(f^m) \cap \mathfrak{b} \subset f^n \mathfrak{b}$$

Da $0 \rightarrow \mathfrak{b}/(f^m) \cap \mathfrak{b} \rightarrow A/(f^m)$ exakt ist, existiert ein A -Modulhomomorphismus $\psi': A/(f^m) \rightarrow I$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{b} & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{b}/(f^m) \cap \mathfrak{b} & \longrightarrow & J \subset I \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow \psi' & \\ A & \longrightarrow & A/(f^m) & & \end{array}$$

kommutativ macht.

Die Abbildung $\psi: A \rightarrow A/(f^m) \xrightarrow{\psi'} I$ landet konstruktionsgemäß in J . Also ist J in der Tat injektiv.

Nun hat $Y \cap Z = Y \setminus (Y \cap D(f))$ nach Voraussetzung die Eigenschaft \mathcal{P} . Da J ein injektiver A -Modul mit $\text{supp } \tilde{J} \subset Y \cap Z$ ist, ist also \tilde{J} welk. Also ist $J = \Gamma(X, \tilde{J}) \rightarrow \Gamma(U, \tilde{J})$ surjektiv. Da $\Gamma(U, \tilde{J}) = \Gamma_Z(U, \tilde{I})$ ist (Übungsaufgabe), folgt die Behauptung. \square

Satz 4.12 Sei $X = \text{Spec} A$ das Spektrum eines noetherschen Rings A . Dann ist für alle quasi-kohärenten Garben \mathcal{F} auf X und alle $k > 0$

$$H^k(X, \mathcal{F}) = 0.$$

Quasikohärente Garben sind also azyklisch auf noetherschen affinen Schemata.

Beweis : Es sei $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ und $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet$ eine injektive Auflösung von M in der Kategorie der A -Moduln. Nach Lemma 4.3, i) ist $0 \rightarrow \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{I}^\bullet$ eine exakte Sequenz quasi-kohärenter Garben. Nach Proposition 4.11 sind alle \widetilde{I}^k welk. Also können wir wegen $\widetilde{M} = \mathcal{F}$ nach Proposition 3.7 und Satz 2.23 mit dieser Auflösung die Kohomologiegruppen $H^i(X, \mathcal{F})$ berechnen. Durch Anwenden von Γ erhalten wir die *exakte* Sequenz von A -Moduln I^\bullet zurück. Somit ist $H^k(X, \mathcal{F}) = 0$ für $k > 0$. \square

5 Čech-Kohomologie

Um Kohomologiegruppen zu berechnen, sind injektive Auflösungen oft schlecht handhabbar. Daher lernen wir jetzt ein weiteres Hilfsmittel kennen.

Definition 5.1 (Čech-Komplex) Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , wobei die Indexmenge I geordnet sei. Für $i_0, \dots, i_p \in I$ setzen wir $U_{i_0 \dots i_p} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$.

Ferner sei \mathcal{F} eine Garbe abelscher Gruppen auf X . $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sei dann der folgende Komplex abelscher Gruppen:

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p}) \text{ mit}$$

$$d^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

$$\alpha = (\alpha_{i_0 \dots i_p})_{\{i_0 < \dots < i_p\}} \xrightarrow{d} \left(\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \underbrace{\alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}}}_{|U_{i_0 \dots i_{p+1}}|} \right)_{i_0 < \dots < i_{p+1}}$$

Hier bedeutet $i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}$, dass der Index i_k weggelassen wird. Die Vorzeichen sind notwendig, damit $d^2 = 0$ gilt (Übungsaufgabe).

Ist I endlich, so setzen wir $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ für $p > |I|$.

Beispiel:

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$$

$$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{i \in j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

$$d^0((\alpha_i)_{i \in I}) = (\alpha_{j|_{U_i \cap U_j}} - \alpha_{i|_{U_i \cap U_j}})_{i < j}$$

Definition 5.2 Sei \mathcal{F} eine Garbe von abelschen Gruppen auf dem topologischen Raum X und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Die Gruppe

$$\begin{aligned} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= h^p(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \\ &= \ker(d^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})) / \operatorname{Im}(d^{p-1} : C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \end{aligned}$$

heißt p -te **Čech Kohomologie** von \mathcal{F} bezüglich \mathcal{U} .

Lemma 5.3 Es ist $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Beweis : $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker d^0 = \{(\alpha_i)_{i \in I} : \alpha_{i|_{U_i \cap U_j}} = \alpha_{j|_{U_i \cap U_j}} \text{ für alle } i < j\}$.

Die Behauptung folgt also aus den Garbenaxiomen. □

Vorsicht! Kurze exakte Sequenzen $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ geben i.a. keine langen exakten Sequenzen von Čech Kohomologiegruppen, d. h. $\check{H}^p(\mathcal{U}, -)$ ist im allgemeinen kein δ -Funktorkomplex. Wählt man etwa die Überdeckung \mathcal{U} , die nur aus der Menge X besteht, so ist $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ für $p \geq 1$, also folgt $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ für $p \geq 1$. Nun ist aber

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}') & \rightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \rightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \rightarrow 0 \\ & & \parallel 5.3 & & \parallel 5.3 & & \parallel 5.3 \\ 0 & \rightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}') & \rightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}'') \end{array}$$

nicht exakt, wenn $H^1(X, \mathcal{F}') \neq 0$ ist.

Proposition 5.4 Ist \mathcal{F} eine beliebige Garbe, so ist $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ für alle $p \geq 1$ und jede Überdeckung \mathcal{U} von X .

Beweis : Wir betrachten für alle $p \geq 1$ die Garbe

$$W^p = \prod_{i_0 < \dots < i_p} (f_{i_0 \dots i_p})_* \mathcal{F}|_{U_{i_0 \dots i_p}},$$

wobei $f_{i_0 \dots i_p} : U_{i_0 \dots i_p} \hookrightarrow X$ die Einbettung ist.

Dann ist

$$\Gamma(V, W^p) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p} \cap V).$$

Insbesondere ist $\Gamma(X, W^p) = C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Wir definieren einen Garbenmorphismus $d^p : W^p \rightarrow W^{p+1}$ wie folgt. Es sei $d_V^p : \Gamma(V, W^p) \rightarrow \Gamma(V, W^{p+1})$ die Abbildung

$$(\alpha_{i_0 \dots i_p})_{i_0 < \dots < i_p} \mapsto \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}}|_{U_{i_0 \dots i_{p+1}} \cap V}.$$

Dann ist $d_X^p = d^p$ aus Definition 5.1. Mit \mathcal{F} sind alle W^p welk. Wir betrachten den Komplex

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow W^1 \rightarrow W^2 \rightarrow \dots$$

Nach den Garbenaxiomen ist

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow W^1$$

exakt.

Wir wollen nun zeigen, dass für alle $p \geq 2$ auch

$$W^{p-1} \rightarrow W^p \rightarrow W^{p+1}$$

exakt ist.

Dazu genügt es zu zeigen, dass für alle $x \in X$ der Halmkomplex

$$W_x^{p-1} \rightarrow W_x^p \rightarrow W_x^{p+1}$$

exakt ist. Jedes $a \in W_x^p$ ist Halm eines Elementes $s \in \Gamma(V, W^p)$ für geeignetes V . Wir können V so klein wählen, dass $V \subset U_j$ für ein $j \in I$ gilt. Wir definieren

$$(h^{p-1}s)_{i_0 \dots i_{p-1}} = (-1)^{\text{sgn}(\delta)} (s_{\delta(j)\delta(i_0)\dots\delta(i_{p-1})})_x$$

wobei δ die Permutation von $\{j, i_0, \dots, i_{p-1}\}$ mit $\delta(j) < \delta(i_0) < \dots < \delta(i_{p-1})$ ist. Ist $j \in \{i_0 \dots i_{p-1}\}$, so setzen wir $(h^{p-1}s)_{i_0 \dots i_{p-1}} = 0$. Dies liefert eine Abbildung $h^{p-1} : W_x^p \rightarrow W_x^{p-1}$. Man kann nachrechnen, dass

$$d^p h^{p-1} + h^p d^{p-1} = \text{id}$$

gilt. Also ist die Identität auf dem Komplex W_x^\bullet homotop zur Nullabbildung. Mit Lemma 2.16 folgt daraus, dass die Kohomologie von W_x^\bullet verschwindet. Somit ist W_x^\bullet exakt, also $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow W^\bullet$ eine welke Auflösung von \mathcal{F} . Nach Proposition 3.7 und Satz 2.24 können wir die Garbenkohomologie von \mathcal{F} mit dieser Auflösung berechnen. Gleichzeitig gilt $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ für $p \geq 1$, da \mathcal{F} selbst welk ist. Daher folgt

$$\begin{aligned} 0 &= h^p(\Gamma(X, W^\bullet)) \\ &= h^p(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \\ &= \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

für alle $p \geq 1$. □

Wie im Beweis von Proposition 5.4 kann man zu jeder quasikohärenten Garbe \mathcal{F} einen Garbenkomplex

$$W^0 \rightarrow W^1 \rightarrow W^2 \rightarrow \dots$$

konstruieren, so dass $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow W^\bullet$ exakt ist und $\Gamma(X, W^p) = C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ gilt. Es sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow J^\bullet$ eine injektive Auflösung von \mathcal{F} . Nach Lemma 2.20 lässt sich $\text{id}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ zu einem Morphismus von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & W^0 & \rightarrow & W^1 & \rightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & J^0 & \rightarrow & J^1 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

fortsetzen. Also erhalten wir nach Anwenden des globalen Schnittfunktors mit Proposition 5.4 Morphismen

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$$

für alle $p \geq 0$.

Aus Lemma 5.3 folgt, dass dieser für $p = 0$ ein Isomorphismus ist. Dies muss im allgemeinen für $p > 0$ nicht gelten. Wir haben aber immerhin das folgende Resultat:

Satz 5.5 *Es sei X ein noethersches separiertes Schema, \mathcal{U} eine offene affine Überdeckung und \mathcal{F} eine quasi-kohärente Garbe auf X .*

Dann gibt für alle $p \geq 0$ Isomorphismen

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(X, \mathcal{F}).$$

Man kann also die Kohomologie der quasi-kohärenten Garben als Čech Kohomologie bezüglich offener affiner Überdeckungen berechnen.

Beweis : Für $p = 0$ folgt die Behauptung aus Lemma 5.3. Wir zeigen zunächst, dass wir \mathcal{F} in eine lokale, quasikohärente Garbe G einbetten können. Dazu betrachten wir eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_j V_j$ mit $V_j \simeq \text{Spec } A_j$. Dann ist $\mathcal{F}|_{V_j} \simeq \tilde{M}_j$ für einen A_j -Modul M_j . Wir betten M_j in einen injektiven A_j -Modul I_j ein. Ferner sei $f^{(j)} : V_j \hookrightarrow X$ die Inklusion und

$$\mathcal{G} = \bigoplus f_*^{(j)}(\tilde{I}_j).$$

Nach Proposition 4.11 ist \tilde{I}_j lokal auf V_j , also ist auch $f_*^{(j)}(\tilde{I}_j)$ lokal auf X (Übungsaufgabe). Somit ist \mathcal{G} lokal. Ferner ist \tilde{I}_j quasi-kohärent auf V_j , also ist nach Proposition 4.8 auch $f_*^{(j)}\tilde{I}_j$ quasikohärent. Aus Lemma 4.3, iii) folgt, dass auch \mathcal{G} quasikohärent ist. Für alle j vermittelt $M_j \subset I_j$ einen injektiven Garbenmorphismus

$$g_j : \mathcal{F}|_{V_j} \simeq \tilde{M}_j \rightarrow \tilde{I}_j$$

Also erhalten wir für jedes $U \subset X$ offen einen injektiven Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\oplus \text{res}} & \bigoplus_j \mathcal{F}(U \cap V_j) & \xrightarrow{g_j} & \bigoplus_j \tilde{I}_j(U \cap V_j) \\ & & & & \parallel \\ & & & & \bigoplus_j (f_*^{(j)} \tilde{I}_j)(U) \\ & & & & \parallel \\ & & & & \mathcal{G}(U). \end{array}$$

Das liefert einen injektiven Garbenmorphismus

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}.$$

Es sei \mathcal{H} der Quotient, d.h. die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

ist exakt. Nach Lemma 4.7 ist \mathcal{H} kohärent. Für alle $i_0 < \dots < i_p$ ist $U_{i_0 \dots i_p}$ als Schnitt von offenen affinen Teilmengen eines separierten Schemas affin. (Übungsaufgabe)

Da \mathcal{F} quasi-kohärent ist, ist somit nach Satz 4.12 $H^1(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{F}) = 0$. Also ist $0 \rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p}) \rightarrow \mathcal{G}(U_{i_0 \dots i_p}) \rightarrow \mathcal{H}(U_{i_0 \dots i_p}) \rightarrow 0$ exakt. Somit ist auch

$$0 \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow 0$$

exakt. Daher haben wir eine exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \rightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow 0.$$

Diese liefert nach Satz 2.15 eine lange exakte Sequenz von Čech Kohomologiegruppen

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Gleichzeitig erhalten wir eine lange exakte Sequenz von Garbenkohomologiegruppen

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \\ \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Nach Lemma 5.3 stimmen die nullten Kohomologiegruppen überein. Da \mathcal{G} weilsch ist, folgt aus Proposition 5.4, dass $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = 0$ ist für $p \geq 1$. Nach Proposition 3.7 ist auch $H^p(X, \mathcal{G}) = 0$ für $p \geq 1$. Also folgt aus dem Diagramm mit exakten Zeilen,

$$\begin{array}{ccccccc} \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}) & \rightarrow & \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \rightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ H^0(X, \mathcal{G}) & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{H}) & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

das $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^1(X, \mathcal{F})$ gilt.

Außerdem folgt aus $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = 0 = H^p(X, \mathcal{G})$ für $p \geq 1$, dass $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \simeq \check{H}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ und $H^p(X, \mathcal{H}) \simeq H^{p+1}(X, \mathcal{F})$ gilt. Da \mathcal{H} ebenfalls quasikohärent ist, folgt mit $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \simeq H^1(X, \mathcal{H})$ auch $\check{H}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq H^2(X, \mathcal{F})$. Induktiv zeigt man so die Behauptung. \square

Ist X ein topologischer Raum und \mathcal{F} eine Garbe abelscher Gruppen auf X , so betrachtet man üblicherweise

$$\varinjlim_{\mathcal{U} \text{ offene Überdeckung von } X} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Der direkte Limes ist hier definiert bezüglich der natürlichen Abbildung

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}),$$

falls die offene Überdeckung \mathcal{V} eine Verfeinerung der offenen Überdeckung \mathcal{U} ist.

Dann hat man immer einen Homomorphismus

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F}).$$

Man kann zeigen, dass dieser für $p = 1$ immer ein Isomorphismus ist. Für $p \geq 2$ ist er im allgemeinen allerdings kein Isomorphismus.

6 Divisoren und Geradenbündel

Definition 6.1 *Es sei X ein Schema. Ein \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} heißt lokal frei vom Rang r , falls es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ von X gibt, so dass für alle $i \in I$*

$$\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}^r$$

gilt. Manchmal nennt man lokal freie Garben auch Vektorbündel auf X .

Ist \mathcal{F} lokal frei vom Rang 1, so heißt \mathcal{F} auch invertierbare Garbe.

Lemma 6.2 *Ist \mathcal{L} eine invertierbare Garbe auf X , so existiert eine invertierbare Garbe \mathcal{L}^\vee auf X mit*

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\vee \simeq \mathcal{O}_X.$$

Die Menge der Isomorphieklassen invertierbarer Garben mit dem Tensorprodukt ist also eine Gruppe. Diese heißt Picardgruppe von X , wir bezeichnen sie mit $\text{Pic}(X)$.

Beweis : Offenbar ist das Tensorprodukt von zwei invertierbaren Garben eine invertierbare Garbe und \mathcal{O}_X spielt die Rolle eines neutralen Elements. Ist \mathcal{L} eine invertierbare Garbe, so betrachten wir

$$\mathcal{L}^\vee = \mathfrak{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X).$$

Es gibt eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $\mathcal{L}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}$. Also ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\vee|_{U_i} &= \mathfrak{H}om_{U_i}(\mathcal{L}|_{U_i}, \mathcal{O}_{U_i}) \simeq \mathfrak{H}om_{U_i}(\mathcal{O}_{U_i}, \mathcal{O}_{U_i}) \\ &\simeq \mathcal{O}_{U_i}. \end{aligned}$$

Ferner haben wir für alle $V \subset X$ offen einen natürlichen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V) \otimes \mathcal{L}^\vee(V) &= \mathcal{L}(V) \otimes \mathfrak{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{L}|_V, \mathcal{O}_V) \rightarrow \mathcal{O}(V) \\ a \otimes f &\mapsto f|_V(a) \end{aligned}$$

Dieser ist nach Einschränkung auf alle U_i ein Isomorphismus, also ein Isomorphismus. □

Beispiel: Wir betrachten das Schema $X = \mathbb{P}_A^r$ über einem Ring A . Dann ist $X = \bigcup_{i=0}^r D_+(x_i)$ mit $D_+(x_i) \simeq \text{Spec } A[x_0, \dots, x_r]_{(x_i)}$. (siehe [AG], Kapitel 5).

Wir finden ein $n \in \mathbb{Z}$. Für jedes i sei

$$B_i(n)$$

die Menge der homogenen Elemente vom Grad n in der Lokalisierung von $A[x_0, \dots, x_r]$ nach x_i . Offenbar ist $B_i(n)$ ein $A[x_0, \dots, x_r]_{(x_i)}$ -Modul und es gilt $B_i(n) = x_i^n A[x_0, \dots, x_r]_{(x_i)}$.

$B_i(n)$ ist also frei vom Rang 1 über $A[x_0, \dots, x_r]_{(x_i)}$. Wir betrachten die quasikohärente Garbe $\widetilde{B_i(n)}$ auf $D_+(x_i)$. Es gilt

$$D_+(x_i) \cap D_+(x_j) = D_+(x_i x_j) \simeq \text{Spec } A[x_0, \dots, x_r]_{(x_i x_j)}.$$

Wir verkleben $\widetilde{B_i(n)}|_{D_+(x_i x_j)}$ mit $\widetilde{B_j(n)}|_{D_+(x_i x_j)}$ entlang des Isomorphismus

$$\begin{aligned} x_i^n A[x_0, \dots, x_r]_{(x_i x_j)} &\rightarrow x_j^n A[x_0, \dots, x_r]_{(x_i x_j)} \\ x_i^n f &\mapsto x_j^n \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^n f. \end{aligned}$$

Das liefert eine invertierbare Garbe $\mathcal{O}_X(n)$ auf $X = \mathbb{P}_A^r$. Offenbar ist $\mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) \simeq \mathcal{O}_X(m+n)$.

Definition 6.3 Es sei Z ein projektives A -Schema und $Z \xrightarrow{f} \mathbb{P}_A^r$ die zugehörige abgeschlossene Immersion. Dann heißt die invertierbare Garbe $i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}(1)$ auf Z sehr ample.

Wir wollen jetzt einige Kohomologiegruppen der Garben $\mathcal{O}(n)$ berechnen.

Satz 6.4 Sei A ein noetherscher Ring und $X = \mathbb{P}_A^r$ mit $r \geq 1$. Wir schreiben $S = A[x_0, \dots, x_r]$ und bezeichnen mit S_d die Menge der homogenen Polynome vom Grad d . Dann ist $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$.

- i) Für jedes $n \geq 0$ existiert ein Isomorphismus $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \cong S_n$. Insbesondere ist $H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq A$. Für $n < 0$ ist $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$.
- ii) $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \simeq A$.
- iii) $H^r(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$, falls $n > -r-1$.

Beweis: Für $i = 0, \dots, r$ sei $U_i = D_+(x_i)$. Das ist eine offene affine Überdeckung von X , mit der wir die Kohomologie von $\mathcal{O}_X(n)$ nach Satz 5.5 als Čech Kohomologie berechnen können.

i) Also ist $H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ Der kern der Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_i \mathcal{O}_X(n)(U_i) & \rightarrow & \bigoplus_{i < j} \mathcal{O}_X(n)(U_i \cap U_j) \\ \parallel & & \parallel \\ \bigoplus_i x_i^n S_{(x_i)} & \rightarrow & \bigoplus_{i < j} x_i^n S_{(x_i x_j)} \end{array}$$

die durch

$$(x_i^n f_i)_i \mapsto (x_i^n f_i - x_j^n f_j)_{i < j}$$

gegeben ist.

Sei $(x_i^n f_i)_i$ im kern dieser Abbildung. Die Einschränkungsabbildungen $\mathcal{O}_X(n)(U_i) \rightarrow \mathcal{O}_X(n)(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathcal{O}_X(n)(U_0 \cap \dots \cap U_r)$ sind alle injektiv. Also liefert $(x_i^n f_i)_i$ ein $g \in \mathcal{O}_X(n)(U_0 \cap \dots \cap U_r)$, das im Schnitt aller $\mathcal{O}_X(n)(U_i)$ liegt.

g lässt sich als $g = x_0^{\mathcal{V}_0} \dots x_r^{\mathcal{V}_r} f$ mit $\mathcal{V}_i \in \mathbb{Z}$ und einem homogenen Polynom f , das von keinem x_k geteilt wird, schreiben. Aus $g \in \mathcal{O}_X(n)(U_i) = x_i^n S_{(x_i)}$ folgt $\mathcal{V}_k \geq 0$ für alle $k \neq i$. Also ist $g \in S_n$, falls $n \geq 0$ ist und $g = 0$, falls $n < 0$ ist.

ii) Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $H^r(X, \mathcal{O}_X(n))$ der Kokern der Abbildung

$$d: \bigoplus_{i_0 < \dots < i_{r-1}} \mathcal{O}_X(n)(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{r-1}}) \rightarrow \mathcal{O}_X(n)(U_0 \cap \dots \cap U_r),$$

denn der nächste Term im Čechkomplex verschwindet. Ein Monom in $\mathcal{O}_X(n)(U_0 \cap \dots \cap U_r)$ hat die Form $cx_0^{l_0} \dots x_r^{l_r}$ mit $\sum_{i=0}^r l_i = n$ und $c \in A$.

Das Bild von d besteht gerade aus den Elementen in $\mathcal{O}_X(n)(U_0 \cap \dots \cap U_r)$, deren Monome alle die Eigenschaft $l_i \geq 0$ für ein i haben.

Ist $n = -r - 1$, so ist also Kokern (d) erzeugt von $x_0^{-1} \dots x_r^{-1}$.

iii) $H^r(X, \mathcal{O}_X(n))$ ist der Kokern der Abbildung d aus ii). Sei

$$g \in \mathcal{O}_X(n)(U_0 \cap \dots \cap U_r)$$

ein Monom. Dann ist $g = cx_0^{l_0} \dots x_r^{l_r}$ mit $\sum_{i=0}^r l_i = n > -r - 1$ und $l_i \in \mathbb{Z}$. Also muss mindestens ein $l_k \geq 0$ sein. Dann liegt g im Bild der Einschränkungsbildung

$$\mathcal{O}_X(n)(U_0 \cap \dots \cap \widehat{U_k} \cap \dots \cap U_r) \rightarrow \mathcal{O}_X(n)(U_0 \cap \dots \cap U_r),$$

also im Bild von d .

□

Definition 6.5 Es sei X ein Schema. Für jedes $x \in X$ bezeichnen wir mit \mathfrak{m}_x das maximale Ideal im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ und mit $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ wie immer den Restklassenkörper. Dann ist $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ ein $\kappa(x)$ -Vektorraum (Übungsaufgabe). Seinen Dualraum

$$T_{X,x} = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee = \text{Hom}_{\kappa(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \kappa(x))$$

nennen wir den **Tangententialraum** von X in x .

Definition 6.6 Ein noetherscher lokaler Ring A mit maximalem Ideal \mathfrak{m} und Restklassenkörper $k = A/\mathfrak{m}$ heißt regulär, falls $\dim A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ gilt.

In jedem noetherschen lokalen Ring gilt $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim A$ (Übungsaufgabe, siehe [AM], Proposition 2.8).

Man kann zeigen, dass jeder reguläre noethersche lokale Ring ein Integritätsring ist.

Definition 6.7 i) Es sei k ein Körper. Eine **diskrete Bewertung** auf k ist eine Abbildung

$$\nu : k^* \rightarrow \mathbb{Z},$$

so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $\nu(\alpha\beta) = \nu(\alpha) + \nu(\beta)$, d.h. ν ist ein Gruppenhomomorphismus.

b) $\nu(\alpha\beta) \geq \min\{\nu(\alpha), \nu(\beta)\}$.

ii) Ein Integritätsring A heißt **diskreter Bewertungsring**, falls es eine diskrete Bewertung ν auf $\text{Quot } A$ gibt mit

$$A = \{x \in (\text{Quot } A)^* : \nu(x) \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Satz 6.8 Für einen lokalen noetherschen Integritätsring A der Dimension 1 sind folgende Aussagen äquivalent:

i) A ist ein diskreter Bewertungsring

ii) Das maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ ist ein Hauptideal.

iii) A ist regulär.

i) \Rightarrow ii): Sei $\nu : (\text{Quot } A)^* \rightarrow \mathbb{Z}$ die diskrete Bewertung mit $A = \{x : \nu(x) \geq 0\} \cup \{0\}$. Dann gilt $A^* = \{x : \nu(x) = 0\}$. Also ist $\mathfrak{m} = \{x : \nu(x) > 0\}$ das maximale Ideal in A . Wähle ein $\pi \in A$, so dass $\nu(\pi)$ ein minimales Element in $\nu(\mathfrak{m}) \subset \mathbb{Z}$ ist. Dann gilt $\mathfrak{m} = (\pi)$.

ii) \Rightarrow iii): Es gilt $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim A = 1$. Da $\mathfrak{m} = (\pi)$ ein Hauptideal ist, wird $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ von einem Element erzeugt. Also gilt $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1 = \dim A$.

iii) \Rightarrow i): Sei $\pi \in \mathfrak{m}$ ein Element, dessen Restklasse mod \mathfrak{m}^2 den eindimensionalen k -Vektorraum $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ erzeugt. Daraus folgt $\mathfrak{m} = (\pi)$ (Übungsaufgabe, siehe [AM], Proposition 2.8).

Für jedes $a \neq 0$ in A definieren wir

$$\nu(a) = \max\{n : a \in (\pi^n)\} = \max\{n : \pi^n \text{ teilt } a \text{ in } A\}.$$

Wir setzen diese Funktion durch $\nu(a/b) = \nu(a) - \nu(b)$ auf $(\text{Quot } A)^*$ fort. Das definiert eine diskrete Bewertung mit Bewertungsring A .

Lemma 6.9 Ist A ein regulärer lokaler Ring, dann ist für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ auch $A_{\mathfrak{p}}$ regulär.

Beweis : Übungsaufgabe (Suchen Sie dieses Resultat in der Literatur). □

Jetzt können wir den Regularitätsbegriff auf Schemata übertragen.

Definition 6.10 Sei X ein lokal noethersches Schema und $x \in X$. Dann heißt X **regulär in x** , falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist. Das Schema X heißt **regulär**, falls es regulär in allen Punkten $x \in X$ ist.

Ein Punkt $x \in X$, in dem X nicht regulär ist, wird auch **singulärer Punkt** oder **Singularität** genannt.

Definitionsgemäß ist X genau dann regulär in $x \in X$, wenn $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim T_{X,x}$ gilt. Nach Lemma 6.9 ist X genau dann regulär, wenn es in allen abgeschlossenen Punkten regulär ist.

Beispiel: Ist k ein Körper, so ist für alle $n \geq 0$ der affine Raum \mathbb{A}_k^n und der projektive Raum \mathbb{P}_k^n ein reguläres Schema.

Als Ergänzung formulieren wir noch das Jacobikriterium, ohne es hier zu beweisen.

Satz 6.11 (Jacobikriterium) Es sei k ein Körper und $X = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset k[x_1, \dots, x_n]$. Wir betrachten für ein $u \in X(k)$ und ein Erzeugendensystem $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ von \mathfrak{a} die (Jacobi-)Matrix

$$J_u = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(u) \right)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, n}}$$

Dann ist X genau dann regulär in u , wenn der Rang von J_u gleich $n - \dim \mathcal{O}_{X,u}$ ist.

Definition 6.12 Es sei X ein noethersches, integres, separiertes Schema, das regulär in Kodimension 1 ist, d.h. jeder lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ mit $\dim \mathcal{O}_{X,x} = 1$ ist regulär.

Dann nennen wir jedes abgeschlossene irreduzible Unterschema $Y \subset X$ der Kodimension 1 einen **Primdivisor**.

Mit $\text{Div}(X)$ bezeichnen wir die freie abelsche Gruppe $\bigoplus_{Y \text{ Primdivisor}} \mathbb{Z} \cdot Y$, die von den Primdivisoren erzeugt wird. Die Elemente von $\text{Div}(X)$ sind also formale Summen

$$D = \sum_i n_i Y_i$$

mit $n_i \in \mathbb{Z}$ und $Y_i \subset X$ Primdivisor. Wir nennen die Elemente von $\text{Div}(X)$ auch Weildivisoren. Sind alle $n_i \geq 0$, so heißt D effektiv.

Es sei X ein Schema wie in Definition 6.12 und $Y \subset X$ ein Primdivisor. Dann sei η der generische Punkt von Y . Dann gilt $1 = \text{codim}(Y, X) = \dim \mathcal{O}_{X,\eta}$.

Also ist $\mathcal{O}_{X,\eta}$ nach Voraussetzung regulär, also ein diskreter Bewertungsring in $\text{Quot} \mathcal{O}_{X,\eta} = K(X)$. Die zugehörige diskrete Bewertung bezeichnen wir mit v_η . Den Körper $K(X)$ nennen wir den Funktionenkörper von X .

Für jedes $f \in K(X)^*$ ist $v_\eta(f) \in \mathbb{Z}$. Ist $v_\eta(f) \geq 0$, so sagen wir, f hat eine Nullstelle in Y der Ordnung $v_\eta(f)$. Ist $v_\eta(f) \leq 0$, so sagen wir, f hat eine Polstelle in Y der Ordnung $-v_\eta(f)$.

Beispiel: Es sei $X = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec} k[x]$. Dann sind die Primdivisoren in X genau die abgeschlossenen Punkte $\{P\}$ in X . Diese entsprechen den maximalen Idealen $m_p \subset k[x]$. Ist $m_p = (x - a)$ für ein $a \in k$, so ist $v_P(f)$ die gewöhnliche Null- bzw. Polstellenordnung von f .

Lemma 6.13 Für jedes $f \in K(X)^*$ gibt es nur endlich viele Primdivisoren Y mit $v_\eta(f) \neq 0$.

Beweis : Sei $U \simeq \text{Spec} A$ eine offene affine Teilmenge von X . Dann gilt $K(X) = \text{Quot}(A)$. Es gibt also eine Lokalisierung A_g von A mit $f \in A_g^*$. Somit existiert eine offene Teilmenge $V \subset U$ mit $f \in \mathcal{O}_X(V)^*$. Die abgeschlossene Teilmenge $Z := X \setminus V \subsetneq X$ hat Kodimension ≥ 1 , da X irreduzibel ist. Da X noethersch ist, hat Z nur endlich viele irreduzible Komponenten. Daher gibt es nur endlich viele Primdivisoren Y , die in Z enthalten sind. Ist Y nicht in Z enthalten, so liegt der generische Punkt Y in V . Aus $f \in \mathcal{O}_X(V)^* \subset \mathcal{O}_{X,\eta}^* \subset K(x)$ folgt dann $v_\eta(f) = 0$. \square

Definition 6.14 Für jedes $f \in K(X)^*$ definieren wir den Divisor von f durch $\text{div}(f) = \sum_{Y \subset X \text{ Primdivisor}} v_\eta(f) \cdot Y \in \text{Div}(X)$. Nach Lemma 6.13 läuft die Summe nur über endlich viele Terme $\neq 0$.

Einen Divisor der Form $\text{div}(f)$ nennen wir Hauptdivisor. Nach Konstruktion ist $v_\eta(fg) = v_\eta(f) + v_\eta(g)$, also ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{div} : K(X)^* &\rightarrow \text{Div}(X) \\ f &\mapsto \text{div}(f) \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Beispiel: Für $X = \mathbb{A}_K^1$ ist jeder Divisor ein Hauptdivisor.

Definition 6.15 Wir definieren die erste Chowgruppe von X als

$$CH^1(X) = \text{Div}(X) / \text{Bild}(\text{div}).$$

Wir nennen zwei Divisoren $D, D' \in \text{Div}(X)$ linear äquivalent und schreiben $D \sim D'$, wenn es ein $f \in K(X)^*$ gibt mit $D - D' = \text{div}(f)$. Also ist $CH^1(X)$ die Menge der linearen Äquivalenzklassen von Divisoren.

Nun wollen wir einen etwas allgemeineren Begriff von Divisoren, die sogenannten Cartierdivisoren, erklären.

Sei X ein integres Schema mit Funktionenkörper $K(X) = \mathcal{O}_{X,\zeta}$, wobei ζ der generische Punkt von X ist. Da X irreduzibel ist, ist auch jede offene Teilmenge $\emptyset \neq U \subset X$ irreduzibel und somit zusammenhängend. Daher ist die konstante Prägarbe

$$U \mapsto K(X)$$

eine Garbe. Wir bezeichnen sie mit \mathcal{K} . Ferner sei \mathcal{O}^* bzw. \mathcal{K}^* die Garbe der Einheiten in \mathcal{O} bzw. \mathcal{K} , d.h.

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \mathcal{O}^*) &= \Gamma(U, \mathcal{O})^* \\ \text{und } \Gamma(U, \mathcal{K}^*) &= \Gamma(U, \mathcal{K})^* = K(X) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten die exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^* \rightarrow 0.$$

Definition 6.16 Sei X ein integres Schema. Ein Cartierdivisor auf X ist ein globaler Schnitt der Garbe $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$. Ein Cartierdivisor $D \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$ wird also gegeben durch eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X sowie $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*)$ für alle $i \in I$ so dass

$$f_i|_{U_i \cap U_j} / f_j|_{U_i \cap U_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$$

gilt. Dabei erhält man D , indem man die Bilder der f_i unter der Abbildung

$$\Gamma(U_i, \mathcal{K}^*) \rightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$$

zu einem globalen Schnitt verklebt. Also geben $(\{U_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I})$ und $(\{V_j\}_{j \in J}, \{g_j\}_{j \in J})$ denselben Cartierdivisor, falls $f_i|_{U_i \cap V_j} / g_j|_{U_i \cap V_j} \in \Gamma(U_i \cap V_j, \mathcal{O}^*)$ für alle i gilt. Die Menge der Cartierdivisoren $\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$ ist eine Gruppe.

Definition 6.17 Für jedes $f \in K(X)^*$ definieren wir den Cartierdivisor $\text{div}(f)$ als das Bild von f unter der natürlichen Abbildung

$$K(X)^* = \Gamma(X, \mathcal{K}^*) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*).$$

Also wird $\text{div}(f)$ durch die Überdeckung $\{X\}$ und das Element $f \in K(X)^*$ gegeben. Jeder Cartierdivisor der Form $\text{div}(f)$ für $f \in K(X)^*$ heißt Hauptdivisor. Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe der Gruppe der Cartierdivisoren $\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$.

Jetzt wollen wir den Zusammenhang zwischen Weil- und Cartierdivisoren erklären.

Proposition 6.18 Sei X ein noethersches, separiertes integres Schema.

- i) Wir nehmen an, dass X normal ist, d.h. dass für jedes $x \in X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ganz abgeschlossen in $K(X) = \text{Quot } \mathcal{O}_{X,x}$ ist. Dann ist X regulär in Kodimension 1 und es gibt einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*) \rightarrow \text{Div}(X)$$

mit $\varphi(\text{div}(f)) = \text{div}(f)$ für jedes $f \in \mathcal{K}^*(X)$.

- ii) Ist X sogar regulär, d.h. sind alle $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär, dann ist φ ein Isomorphismus. In diesem Fall gilt also

$$\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)/\Gamma(X, \mathcal{K}^*) \simeq CH^1(X).$$

Beweis :

- i) Es sei D ein Cartierdivisor, der durch $(\{U_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I})$ gegeben wird. Sei $Y \subset X$ ein Primdivisor. Dann definieren wir $v_\eta(D) = v_\eta(f_i)$, falls $U_i \cap Y \neq \emptyset$ ist. Das ist wohldefiniert, denn aus $U_i \cap Y \neq \emptyset$ und $U_j \cap Y \neq \emptyset$ folgt wegen $f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$, dass $v_\eta(f_i/f_j) = 0$ ist. Somit ist $\varphi(D) = \sum_Y v_\eta(D) \cdot Y$ ein Weildivisor. Offenbar ist φ ein Gruppenhomomorphismus $\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*) \rightarrow \text{Div}(X)$.
-

Ist $\varphi(D) = 0$, so ist $v_\eta(f_i) = 0$ für alle Primdivisoren Y und alle i mit $Y \cap U_i \neq \emptyset$. Wir können annehmen, dass alle $U_i \simeq \text{Spec} A_i$ affin sind. Die Primdivisoren Y mit $Y \cap U_i \neq \emptyset$ sind gerade die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von U_i der Kodimension 1.

Das Element $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*) = K(X)^*$ erfüllt $v_\eta(f_i) = 0$ für alle diese Y , also gilt $f_i \in \mathcal{O}_{X,\eta}^*$ für den generischen Punkt η von Y . Dieser entspricht dem Primideal der Höhe 1 in A_i . Nun ist A_i ganz abgeschlossen in $\text{Quot } A_i \simeq K(x)$, also gilt

$$A_i = \bigcap_{ht(\mathfrak{p})=1} (A_i)_{\mathfrak{p}}$$

nach [Mat], Theorem 38, S. 124.

Daher liegen f_i und f_i^{-1} in $\Gamma(U_i, \mathcal{O})$, also ist $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^*)$. Somit ist D ein Hauptdivisor.

- ii) Ist X regulär, so ist für jedes $x \in X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär. Nach [Mat], S. 141/142 ist dann jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ der Höhe 1 ein Hauptideal. Gegeben sei ein Weildivisor $\sum n_Y Y$ auf X . Für beliebiges $x \in X$ betrachten wir

$$\sum_{x \in Y} n_Y Y.$$

Es sei $\text{Spec } A \simeq U$ eine offene affine Umgebung von x und $\mathfrak{p}_x \subset A$ das zugehörige Primideal. Ist $Y = \overline{\{\eta\}}$ ein Primdivisor mit $x \in Y$, so entspricht η einem Primideal der Höhe 1 in A , das in \mathfrak{p}_x enthalten ist. Dieses induziert ein Primideal der Höhe 1 in $\mathcal{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}_x}$, welches nach der obigen Bemerkung ein Hauptideal (π_Y) ist. Also ist $f_x = \prod_{x \in Y} \pi_Y^{n_Y}$ ein Element in $\text{Quot } \mathcal{O}_{X,x} = K(X)$ mit

$$v_Y(f_x) = n_Y$$

für alle Primdivisoren Y mit $x \in Y$.

Sei U_x eine offene Umgebung von x , die nur die Primdivisoren Y mit $x \in Y$ und $n_Y \neq 0$ trifft.

Wir überdecken X mit solchen U_x und erhalten einen Cartierdivisor D gegeben durch $(\{U_x\}_{x \in X}, \{f_x\}_{x \in X})$, der $\varphi(D) = \sum n_Y Y$ erfüllt.

□

Nun werden wir Cartierdivisoren und invertierbare Garben in Verbindung bringen.

Proposition 6.19 *Sei X ein integrales Schema. Dann gibt es einen surjektiven Homomorphismus*

$$\psi : \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*) \rightarrow \text{Pic}(X),$$

dessen Kern die Untergruppe der Hauptdivisoren $\text{div}(K(X)^)$ ist. Also vermittelt ψ einen Isomorphismus*

$$\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)/\text{div}(K(X))^* \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X).$$

Beweis : Sei $D \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$ ein Cartierdivisor, der durch $(\{U_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I})$ gegeben wird. Wir betrachten die Untergarbe $f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$ von \mathcal{K}_{U_i} . Für alle $v \subset U_i$ offen ist also

$$(f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i})(v) = \left\{ \frac{x}{f_i|_v} : x \in \mathcal{O}^*(V) \right\} \subset K(X).$$

Auf $U_i \cap U_j$ ist $f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$. Also gilt $(f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i})|_{U_i \cap U_j} = (f_j^{-1}\mathcal{O}_{U_j})|_{U_i \cap U_j}$. Somit erhalten wir eine Untergarbe $\mathcal{L}(D)$ von \mathcal{K} mit $\mathcal{L}(D)|_{U_i} = f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$. Diese ist lokal frei vom Rang 1 auf X , also eine invertierbare Garbe. Wir definieren $\psi(D)$ als die Isomorphieklasse von $\mathcal{L}(D)$. Sind D_1 und D_2 zwei Cartierdivisoren, so finden wir eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$, so dass D_1 durch $(\{U_i\}_{i \in I}, \{f_i^{(1)}\}_{i \in I})$ und D_2 durch $(\{U_i\}_{i \in I}, \{f_i^{(2)}\}_{i \in I})$ gegeben wird. Dann wird $D_1 + D_2$ durch $(\{U_i\}_{i \in I}, \{f_i^{(1)} f_i^{(2)}\}_{i \in I})$ gegeben. Also ist $\mathcal{L}(D_1 + D_2)|_{U_i} = f_i^{(1)} f_i^{(2)} \mathcal{O}_{U_i} = (f_i^{(1)} \mathcal{O}_{U_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} (f_i^{(2)} \mathcal{O}_{U_i}) = \mathcal{L}(D_1)|_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{L}(D_2)|_{U_i}$ für alle $i \in I$, woraus $\mathcal{L}(D_1 + D_2) = \mathcal{L}(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D_2)$ folgt. Somit ist ψ ein Gruppenhomomorphismus.

Ist $D = \text{div}(f)$ ein Hauptdivisor, so wird D durch $(\{X\}, \{f\})$ gegeben. Also ist $\mathcal{L}(D) = \frac{1}{f}\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X$. Gilt umgekehrt $\mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{O}_X$, so sei $f \in \Gamma(X, \mathcal{L}(D)) \subset \Gamma(X, \mathcal{K})$ das Element, das unter diesem Isomorphismus auf $1 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ abgebildet wird. Also ist $\mathcal{L}(D) = f\mathcal{O}_X$. Wird D durch $(\{U_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I})$ gegeben, so ist definitionsgemäß $\mathcal{L}(D)|_{U_i} = f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$. Aus $f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i} = f\mathcal{O}_{U_i}$ folgt $f_i f \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^*)$. Daher ist $D = \text{div}(f^{-1})$ ein Hauptdivisor. \square

Nach Proposition 6.19 gilt also auf jedem integren Schema X

$$\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)/\text{div}K(X)^* \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X).$$

Betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

von Garben abelscher Gruppen auf X , so erhalten wir die lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^*) \xrightarrow{\text{div}} \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}^*).$$

Da die Garbe \mathcal{K}^* konstant ist, ist sie welk, also nach Proposition 3.7 azyklisch. Somit ist $H^1(X, \mathcal{K}^*) = 0$ und

$$\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)/\text{div } K(X)^* \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}^*)$$

Zusammen mit Proposition 6.19 erhalten wir also einen natürlichen Homomorphismus

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X).$$

Wir wollen jetzt noch nachweisen, dass kohärente Kohomologiegruppen auf projektiven Schemata endlich erzeugt sind.

Lemma 6.20 *Es sei X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring A und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X . Ist $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}_A^n$ eine abgeschlossene Immersion, so gilt*

$$H^k(X, \mathcal{F}) \simeq H^k(\mathbb{P}_A^n, i_*\mathcal{F})$$

für alle $k \geq 0$.

Beweis : Es sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}^\bullet$ eine welke Auflösung von \mathcal{F} auf X . Dann ist $0 \rightarrow i_*\mathcal{F} \rightarrow i_*\mathcal{J}^\bullet$ eine welke Auflösung von $i_*\mathcal{F}$. Da man nach Proposition 3.7 und Satz 2.23 Kohomologie mit welken Auflösungen berechnen kann, folgt die Behauptung. \square

Lemma 6.21 *Sei A ein noetherscher Ring und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf \mathbb{P}_A^n .*

i) *Ist $S \in \Gamma(D_+(x_i), \mathcal{F})$ für ein $i = 0, \dots, n$, so gibt es ein $m_0 \geq 0$, so dass $x_i^m S$ sich für alle $m \geq m_0$ zu einem globalen Schnitt von $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m)$ fortsetzen lässt.*

ii) *Es gibt ein $m \geq 0$ und ein $N \geq 0$, so dass ein surjektiver Homomorphismus*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}^N \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m)$$

existiert. Man sagt in diesem Fall auch, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m)$ ist von globalen Schnitten erzeugt.

Beweis :

- i) Da \mathcal{F} kohärent ist, gilt $\mathcal{F}|_{D_+(x_i)} \simeq \widetilde{M}_i$ für einen endlich erzeugten $\mathcal{O}(D_+(x_i))$ -Modul M_i . Ferner ist $\mathcal{O}(m)|_{D_+(x_i)} = x_i^m \mathcal{O}_{D_+(x_i)}$. Also gilt $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m)|_{D_+(x_i)} \simeq \widetilde{x_i^m M_i}$. Ist $s \in \Gamma(D_+(x_i), \mathcal{F}) = M_i$ gegeben, so folgt aus

$$(M_i)_{\frac{x_j}{x_i}} \simeq \mathcal{F}|_{D_+(x_i x_j)} \simeq (M_j)_{\frac{x_i}{x_j}},$$

dass $\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^m s \in M_j$ ist für $m \geq m_0$ bei geeigneter Wahl von m_0 .

Also ist $x_i^m s \in x_j^m M_j = \Gamma(D_+(x_j), \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m))$. Mit etwas Mühe kann man zeigen, dass sich m_0 so groß wählen lässt, dass $x_i^m s$ sich zu einem Element in $\Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m))$ verkleben lässt (vgl. Lemma 4.5).

- ii) Für alle $i = 0, \dots, n$ ist $\mathcal{F}|_{D_+(x_i)} \simeq \widetilde{M}_i$ für einen $\mathcal{O}(D_+(x_i))$ -Modul M_i , der von endlich vielen Elementen s_1, \dots, s_k erzeugt ist. Nach i) gibt es ein $m \geq 0$, so dass sich $x_i^m s_1, \dots, x_i^m s_k$ zu globalen Schnitten von $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m)$ fortsetzen lassen. Wir fassen alle diese globalen Schnitte zu einer endlichen Menge von globalen Schnitten $\{t_1, \dots, t_N\}$ zusammen. Dann ist der \mathcal{O} -Modulhomomorphismus

$$\mathcal{O}^N \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m),$$

der den j -ten Einheitsvektor auf t_j abbildet, surjektiv.

□

Proposition 6.22 Sei A ein noetherscher Ring. Für jede kohärente Garbe \mathcal{F} auf \mathbb{P}_A^n und jedes $k \geq 0$ ist dann $H^k(\mathbb{P}_A^n, \mathcal{F})$ ein endlich erzeugter A -Modul.

Beweis : (mit absteigender Induktion nach k)

Nach Satz 5.5 können wir $H^k(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ mit Čech-Kohomologie berechnen. Da \mathbb{P}_A^n eine offene affine Überdeckung aus $n + 1$ Elementen hat, ist $H^k(\mathbb{P}_A^n, \mathcal{F}) = 0$ für $k \geq n + 1$. Angenommen, $H^k(\mathbb{P}_A^n, \mathcal{F}) = 0$ für alle $k \geq k_0$.

Nach Lemma 6.21 ii) gibt es ein $m \geq 0$ und ein $N \geq 0$, so dass eine surjektive Abbildung

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}^N \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m)$$

existiert. Da $\mathcal{O}(m)$ eine invertierbare Garbe ist, ist auch die durch Tensorieren mit $\mathcal{O}(-m)$ induzierte Abbildung

$$\mathcal{O}(-m)^N \rightarrow \mathcal{F}$$

surjektiv.

Also erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}(-m)^N \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

für eine kohärente Garbe \mathcal{G} . Nach Satz 6.4 ist $H^k(\mathbb{P}_A^n, \mathcal{O}(-m)^N)$ ein endlich erzeugter A -Modul. Nach Induktionsvoraussetzung ist $H^{k+1}(\mathbb{P}_A^n, \mathcal{G})$ endlich erzeugt über A . Also ist aufgrund der langen exakten Kohomologiesequenz auch $H^k(\mathbb{P}_A^n, \mathcal{F})$ endlich erzeugt über A . \square

Korollar 6.23 *Es sei X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring A und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X . Dann ist $H^k(X, \mathcal{F})$ für alle $k \geq 0$ ein endlich erzeugter A -Modul.*

Beweis : Das folgt aus Lemma 6.20 und Proposition 6.22. \square

Literatur

- [AG] A. Werner. *Algebraische Geometrie I*, SS 2013.
- [AM] M. Atiyah, MacDonald. *Commutative Algebra*.
- [Ha] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*.
- [HS] G. Hilton/ U. Stambach. *A course in homological algebra*.
- [Mat] H. Matsumura. *Commutative algebra* (1970).
- [ML] S. MacLane. *Categories for the working mathematician*, Springer Verlag.
- [Wei] C. Weibel. *An introduction to homological algebra*.