Blatt 2

In allen Aufgaben sei K immer ein beliebiger Körper.

Aufgabe 2.1 **(4 Punkte)**

(a) Zu jedem $\lambda \in K$ sei $D_\lambda = (d_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(K)$ die durch

$$d_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

definierte Matrix. Zeige, dass dann für alle $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt: $QD_\lambda Q^{-1} = D_\lambda$.

(b) Finde Matrizen $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ und $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, so dass die Matrix $B = PAP^t$ nicht von der Form $B = QAQ^{-1}$ für ein $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist.

(c) Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ symmetrisch und $P \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeige, dass PAP^t dann ebenfalls symmetrisch ist.

(d) Finde Matrizen $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ und $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, so dass die Matrix $B = QAQ^{-1}$ nicht von der Form $B = PAP^t$ für ein $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 2.2 **(4 Punkte)**

Bestimme, welche der folgenden Bilinearformen symmetrisch, anti-symmetrisch oder alternierend sind.

(a) $K^2 \times K^2 \to K, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

(b) $M_n(K) \times M_n(K) \to K, \quad A, B \mapsto \mathrm{Spur}(AB)$

Aufgabe 2.3 **(4 Punkte)**

Ein **Projektor** auf einem K-Vektorraum V ist eine lineare Abbildung $p : V \to V$ mit $p^2 = p$. Zeige:

(a) Jeder Projektor p definiert eine Zerlegung von V als direkte Summe vermöge

$$V = \ker(p) \oplus \mathrm{im}(p).$$

(b) Zu einer Zerlegung von V als direkte Summe $V = U \oplus W$ gehört genau ein Projektor p mit $\ker(p) = U$ und $\mathrm{im}(p) = W$.

(c) Mit p ist auch $\mathrm{id}_V - p$ ein Projektor.

(d) Das Vertauschen der Summanden in der Zerlegung $V = U \oplus W$ entspricht der Involution $p \mapsto \mathrm{id}_V - p$ auf der Menge der Projektoren auf V.

Aufgabe 2.4 **(4 Punkte)**

Sei $V = K^3$ und $f : V \times V \to K$ die durch $f(x, y) = x^t Ay$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(K)$$

definierte alternierende Bilinearform. Bestimme den (Links-)Kern $V^\perp$ und finde eine Basis $\mathscr{B}$, bezüglich der f die Gram'sche Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Abgabe der Lösungen am nächsten Mittwoch (14. 05.)!