Geometrie

für Bachelor und L3 — Sommersemester 2014

GOETHE–UNIVERSITÄT FRANKFURT

JAKOB STIX

Zusammenfassung. — Die Vorlesung behandelt die grundlegende Theorie der Bilinearformen auf Vektorräumen. Thema sind insbesondere euklidische Vektorräume, Isometrien und Bewegungen, affine und projektive Geometrie. Als Anwendung klassifizieren wir Kegelschnitte.

Dieses Skript zur Vorlesung Geometrie befindet sich noch in der Entstehung und wird fortlaufend aktualisiert. Es muß davon ausgegangen werden, daß es noch einige Zeit dauern wird, bis eine stabile Version entstanden ist und die gröbsten Fehler korrigiert sind. Sie lesen das Skript **auf eigene Gefahr!**

Bitte teilen Sie mir Korrekturvorschläge per Email oder persönlich nach der Vorlesung mit.

Das Bonusmaterial in Kleindruck enthält historische Bezüge, weitere Kommentare, oder Vorgriffe zur Einordnung in der breiteren/höheren Kontext. Es ist nicht klausurrelevant.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung. Ich möchte mich gerne bei allen bedanken, insbesondere bei den Studierenden Adrian Baumann, Theresa Kumpitsch, Denise Melchin und Julia Weber, die dazu beigetragen haben, das Skript von kleineren und größeren Eseleien zu befreien, auch wenn dies ein Kampf gegen die Windmühlen und die Rechtschreibreform ist. So mag ich beispielsweise beim besten Willen manches Mal nicht auf das "ß" verzichten.

Einführung

In der Linearen Algebra 1 entwickelt man die abstrakte algebraische Theorie, um **lineare** (homogene) Polynome, wie zum Beispiel $3x + 5y$, und die daraus resultierenden Gleichungssysteme zu studieren. Dies ist die Theorie der Vektorräume und der linearen Abbildungen, in expliziter Form durch Matrizen gegeben.

In der Geometrie werden Vektorräume mit Begriffen für Abstand und Winkel versehen. Es stellt sich heraus, daß dazu bilineare Theorie nötig ist: **quadratische** (homogene) Polynome. Wir illustrieren den Zusammenhang mit Matrizen durch die folgende Beispielrechnung.

Eine quadratische Form, also homogen vom Grad 2, kann durch eine symmetrische Matrix beschrieben werden:

$$q(x,y) = 19x^2 - 4xy + 16y^2 = (x,y)\begin{pmatrix} 19 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist symmetrisch gewählt, aber die Nichtdiagonaleinträge tragen beide zum Monom

$$xy$$

bei. Diese symmetrische Aufteilung ist willkürlich, aber symmetrische Matrizen haben besondere Eigenschaften, die es hier auszunutzen gilt.

Die quadratische Ergänzung

$$19x^2 - 4xy + 16y^2 = 3(x+2y)^2 + 4(y-2x)^2$$

zeigt, daß nach Koordinatenwechsel $u = x + 2y$ und $v = y - 2x$, also $\binom{u}{v} = S\binom{x}{y}$ mit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

die quadratisch Form einfacher wird:

$$q(u,v) = 3u^2 + 4v^2.$$

In den neuen Koordinaten ist für $r > 0$ die Menge

$$E_r := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; ; \; q(u,v) = r \right\}$$

eine Ellipse. Die Achsen des neuen Koordinatensystems liegen in Richtung der Spalten von

$$S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und diese enthalten gerade die Eigenvektoren (nachrechnen!) von der symmetrischen Matrix

$$\begin{pmatrix} 19 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix},$$

welche für die quadratische Form verantwortlich ist. Die entsprechenden Eigenwerte 3 und 4 treten als Koeffizienten in $q(u,v)$ auf. Der Satz über die Hauptachsentransformation besagt insbesondere, daß die neuen Achsen wieder senkrecht aufeinander stehen und die Koordinatentransformation so gewählt werden kann, daß sie Winkel erhält. Die Mengen E_r sind also auch in alten Koordinaten Ellipsen.

Die folgenden Lehrbücher werden für die Vorlesung empfohlen.

Literatur

[Ar93] Michael Artin, *Algebra*, Übersetzung des englischen Originals von 1991 durch Annette A'Campo, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993, xiv+705 Seiten.

[Bo08] Siegfried Bosch, *Lineare Algebra*, Springer-Lehrbuch, 4. überarbeitete Auflage, 2008, x+297 Seiten.

[Br03] Theodor Bröcker, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Birkhäuser, 2003, x+266 Seiten.

[Ko83] Max Koecher, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer, 1983, xi+286 Seiten.

Teil 1. Bilinearformen

1. Paarungen von Vektorräumen

1.1. Paarungen. Wir führen den folgenden multilinearen Begriff ein.

Definition 1.1. Sei K ein Körper und V, W seien K-Vektorräume. Eine **Paarung** von V mit W ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} (\ ,\ ) : V \times W &\to K \\ v, w &\mapsto (v, w) \end{aligned}$$

mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Für $v_1, v_2 \in V$ und $w \in W$ gilt

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w).$$

(ii) Für $v \in V$ und $w_1, w_2 \in W$ gilt

$$(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2).$$

(iii) Für $v \in V$, $w \in W$ und $\lambda \in K$ gilt

$$(\lambda v, w) = \lambda(v, w) = (v, \lambda w).$$

Man sagt kurz: die Paarung ist **bilinear** (oder **K-bilinear**).

Bemerkung 1.2. Bilinear bedeutet 'linear in beiden Argumenten', also fixiert man das eine, so entsteht eine lineare Abbildung im anderen Argument. Das ist von der Determinante einer Matrix bekannt, die eine multilineare Abbildung als Funktion der Spalten ist.

Notation 1.3. Wenn die Notation mit Klammern zu unübersichtlich wird, schreiben wir auch $f(v, w)$ für eine Paarung $f : V \times W \to K$.

Beispiel 1.4. (1) Das fundamentale Beispiel $\langle\ ,\ \rangle$ trägt den Namen **Standardskalarprodukt** auf K^n, und ist definiert für $V = W = K^n$ mittels

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Der Nachweis der Bilinearität ist eine einfache Übung im Distributivgesetz von K und gelingt am ökonomischsten mit der Schreibweise

$$\langle x, y \rangle = x^t y,$$

welche das Skalarprodukt durch Matrixmultiplikation mit dem transponierten Vektor $x^t = (x_1, \ldots, x_n)$ beschreibt.

(2) Wir erinnern zunächst an die K-lineare Abbildung der Spur auf quadratischen $n \times n$-Matrizen

$$\mathrm{Sp} : \mathrm{M}_n(K) \to K,$$

nämlich die Summe der Einträge auf der Diagonalen: für die Matrix $A = (a_{ij})$

$$\mathrm{Sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Sei $V = \mathrm{M}_{n \times m}(K)$ und $W = \mathrm{M}_{m \times n}(K)$ Vektorräume von Matrizen mit Einträgen im Körper K. Für $A \in V$ und $B \in W$ ist $AB \in \mathrm{M}_n(K)$ eine quadratische Matrix und hat demnach eine Spur. Dann definiert

$$(A, B) := \mathrm{Sp}(AB)$$

eine Paarung $V \times W \to K$. Wir zeigen exemplarisch für $A_1, A_2 \in V$

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2, B) &= \mathrm{Sp}((A_1 + A_2)B) = \mathrm{Sp}(A_1B + A_2B)\\ &= \mathrm{Sp}(A_1B) + \mathrm{Sp}(A_2B) = (A_1, B) + (A_2, B).\end{aligned}$$

(3) Sei $f(x) \in C_c(\mathbb{R})$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger, d.h. für ein geeignetes von f abhängiges $R > 0$ ist $f(x) = 0$ für alle $|x| > R$. Sei $g(x) \in C(\mathbb{R})$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann ist das Integral

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \quad \in \mathbb{R}$$

wohldefiniert, und als Funktion von $f(x)$ und $g(x)$ eine Paarung $C_c(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

1.2. **Matrixbeschreibung.** Wir betrachten ein weiteres Beispiel.

Beispiel 1.5. Mit $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ definiert

$$\begin{aligned}(\ ,\ )_A : K^n \times K^m &\to K\\ x, y &\mapsto (x, y)_A := \langle x, Ay\rangle = x^tAy\end{aligned}$$

eine Paarung. Wir rechnen exemplarisch für $y, y' \in K^m$

$$(x, y + y')_A = \langle x, A(y + y')\rangle = \langle x, Ay + Ay'\rangle = \langle x, Ay\rangle + \langle x, Ay'\rangle = (x, y)_A + (x, y')_A.$$

Wenn $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$, dann ist genauer

$$\left(\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\right)_A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j.$$

Wir wollen nun einsehen, daß dies kein Beispiel sondern die Beschreibung einer jeden Paarung zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen liefert.

Definition 1.6. Die **Koordinatenmatrix** oder **Gram'sche Matrix** einer Paarung von endlichdimensionalen K-Vektorräumen $f : V \times W \to K$ bezüglich Basen $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ von V und $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ von W ist die $n \times m$-Matrix

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = (f(b_i, c_j))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \in \mathrm{M}_{n\times m}(K).$$

Notation 1.7. Wir verwenden die Notation aus Definition 1.6 weiter und erinnern an den Koordinatenisomorphismus

$$\kappa_{\mathscr{B}} : V \xrightarrow{\sim} K^n,$$

der einen Vektor $v \in V$, der in der Basis $\mathscr{B}$ als $v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ geschrieben werden kann, auf

$$\kappa_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

abbildet. Es gilt insbesondere

$$\kappa_{\mathscr{B}}(b_i) = e_i$$

wobei e_i der i-te Standardbasisvektor von K^n ist, der außer einer 1 im i-ten Eintrag sonst nur den Eintrag 0 hat.

Beispiel 1.8. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ und $(\ ,\ )_A : K^n \times K^m \to K$ die zugehörige Paarung aus Beispiel 1.5. Die Gram'sche Matrix zu $(\ ,\ )_A$ bezüglich der Standardbasis[1] $\mathscr{E} = \{e_1, \ldots, e_i, \ldots\}$ hat als ij-ten Eintrag

$$(e_i, e_j)_A = e_i^t A e_j = a_{ij},$$

[1] Vorsicht: mißbräuchlich gleiche Notation für die Standardbasis von K^n und für K^m.

also

$$\mathrm{M}^{\mathscr{E},\mathscr{E}}((\ ,\ )_A) = A.$$

Proposition 1.9. *Sei $f : V \times W \to K$ eine Paarung endlichdimensinaler K-Vektorräume V und W mit Basen $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ von V und $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ von W. Sei $A = \mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ die Gram'sche Matrix der Paarung. Dann ist das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_{\mathscr{B}} \times \kappa_{\mathscr{C}}"'] & K \arrow[d, equal] \\ K^n \times K^m \arrow[r, "(\ ,\ )_A"] & K. \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Bemerkung 1.10. Proposition 1.9 beschreibt in Diagrammform: für $v \in V$ und $w \in W$ gilt

$$f(v,w) = \langle \kappa_{\mathscr{B}}(v), \mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\kappa_{\mathscr{C}}(w)\rangle. \tag{1.1}$$

Mit anderen Worten: nach Einführung von Koordinaten für V und W wird die gegebene beliebige Paarung f durch die von der Gram'schen Matrix zu f definierte Paarung beschrieben.

Beweis von Proposition 1.9. Wir müssen für $v = \sum_{i=1}^n x_i b_i$ und $w = \sum_{j=1}^m y_j c_j$ die Gleichung (1.1) nachweisen:

$$\begin{aligned} f(v,w) &= f(\sum_{i=1}^n x_i b_i, \sum_{j=1}^m y_j c_j) = \sum_{i=1}^n x_i f(b_i, \sum_{j=1}^m y_j c_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j f(b_i, c_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)_{ij} y_j = \langle \kappa_{\mathscr{B}}(v), \mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\kappa_{\mathscr{C}}(w)\rangle, \end{aligned}$$

denn

$$\kappa_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \kappa_{\mathscr{C}}(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

□

Um zu beantworten, wie sich die Gram'sche Matrix einer Paarung ändert, wenn man die Basen wechselt, erinnern wir an die Basiswechselmatrix.

Notation 1.11. Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ und W ein K-Vektorraum mit Basis $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_m)$. In den zugehörigen Koordinaten wird eine K-lineare Abbildung $g : V \to W$ durch Matrixmultiplikation mit

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(g) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$$

beschrieben, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\kappa_{\mathscr{B}}"'] & W \arrow[d, "\kappa_{\mathscr{C}}"] \\ K^n \arrow[r, "\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(g)"] & K^m \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei ist die i-te Spalte von $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(g)$ gegeben durch das Bild des i-ten Basisvektors $g(b_i)$ geschrieben in Koordinaten bezüglich der Basis $\mathscr{C}$.

Der Spezialfall $V = W$ und $g = \mathrm{id}_V$ führt zur Basiswechselmatrix

$$S = \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{M}_n(K)$$

mit für alle $v \in V$:

$$S\kappa_{\mathscr{B}}(v) = \kappa_{\mathscr{C}}(v). \tag{1.2}$$

Proposition 1.12. *Sei $f : V \times W \to K$ eine Paarung endlichdimensinaler K-Vektorräume V und W mit Basen $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ von V und $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ von W. Sei $\mathscr{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ eine weitere Basis von V, und sei $\mathscr{C}' = (c'_1, \ldots, c'_m)$ eine weitere Basis von W. Dann gilt*

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = S^t\,\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)T$$

mit den Basiswechselmatrizen

$$S = \mathrm{M}^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V),$$
$$T = \mathrm{M}^{\mathscr{C}'}_{\mathscr{C}}(\mathrm{id}_W).$$

Beweis. Für $v \in V$ und $w \in W$ gilt nach Proposition 1.9 und (1.2)

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathscr{B}'}(v)^t\,\mathrm{M}^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)\kappa_{\mathscr{C}'}(w) = f(v,w) &= \kappa_{\mathscr{B}}(v)^t\,\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\kappa_{\mathscr{C}}(w)\\ &= \big(S\kappa_{\mathscr{B}'}(v)\big)^t\,\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\big(T\kappa_{\mathscr{C}'}(w)\big)\\ &= \kappa_{\mathscr{B}'}(v)^t\big(S^t\,\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)T\big)\kappa_{\mathscr{C}'}(w).\end{aligned}$$

Setzen wir $v = b'_i$ und $w = c'_j$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{M}^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)\big)_{ij} &= e_i^t\,\mathrm{M}^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)e_j = f(b'_i, c'_j)\\ &= e_i^t\big(S^t\,\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)T\big)e_j = \big(S^t\,\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)T\big)_{ij},\end{aligned}$$

und dies zeigt die Behauptung. □

Lemma–Definition 1.13. *Seien V, W zwei K-Vektorräume. Die Menge der Paarungen von V mit W bildet einen K-Vektorraum unter punktweiser Addition und Skalarmultiplikation, den wir mit*

$$\mathscr{L}(V, W; K)$$

bezeichnen.

Beweis. Punktweise bedeutet, daß für $\lambda \in K$ und $(\ ,\ ), (\ ,\ )_1, (\ ,\ )_2 \in \mathscr{L}(V, W; K)$ Addition und Skalarmultiplikation von Paarungen als die Funktionen auf $v \in V$ und $w \in W$ wie folgt definiert sind:

$$\big((\ ,\ )_1 + (\ ,\ )_2\big)(v, w) := (v, w)_1 + (v, w)_2$$

und

$$\big(\lambda(\ ,\ )\big)(v, w) := \lambda \cdot (v, w).$$

Daß diese Formeln Paarungen, also Elemente in $\mathscr{L}(V, W; K)$, definieren, ist genauso ausschließlich Fleißarbeit, wie der Nachweis, daß damit eine K-Vektorraumstruktur definiert wird. Wir erwähnen nur, daß der Nullvektor durch die identisch verschwindende Paarung $(v, w)_0 := 0$ für alle $v \in V$ und $w \in W$ gegeben ist. □

Satz 1.14. *Die Abbildung, die einer Paarung endlichdimensionaler K-Vektorräumen ihre Gram'sche Matrix zuordnet, ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen. Genauer: Sei $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V und $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ eine Basis von W. Dann ist*

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(-) : \mathscr{L}(V, W; K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_{n\times m}(K)$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis. Eine Abbildung nach $\mathrm{M}_{n\times m}(K)$ ist linear, wenn jeder ij-te Matrixeintrag linear ist (für alle $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$). Dies sind die Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(V, W; K) &\to K\\ f &\mapsto f(b_i, c_j)\end{aligned}$$

und diese sind per Definition der K-Vektorraumstruktur auf $\mathscr{L}(V,W;K)$ linear.

Die Gleichung (1.1) zeigt, daß man aus der Gram'schen Matrix die Paarung berechnen kann. Daher ist die Abbildung injektiv. Es fehlt nunmehr nur noch die Surjektivität.

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ beliebig. Dann definiert

$$v, w \mapsto \langle \kappa_{\mathscr{B}}(v), A\kappa_{\mathscr{C}}(w)\rangle$$

für $v \in V$ und $w \in W$ eine Paarung $f_A : V \times W \to K$. Die Gram'sche Matrix zu f_A bezüglich $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$ hat ij-ten Eintrag

$$f_A(b_i, c_j) = \langle \kappa_{\mathscr{B}}(b_i), A\kappa_{\mathscr{C}}(c_j)\rangle = \langle e_i, Ae_j\rangle = a_{ij}.$$

Also ist A die Gram'sche Matrix von f_A, und das zeigt die Surjektivität (vgl. Beispiel 1.8). □

1.3. **Der Dualraum.** Für K-Vektorräume V und W ist die Menge

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) := \{f : V \to W \ ; \ K\text{-linear}\}$$

ein K-Vektorraum. Addition und Skalarmultiplikation sind punktweise definiert, analog zu Lemma–Definition 1.13. Der Dualraum von V ist der Spezialfall $W = K$.

Definition 1.15. Der **Dualraum** eines K-Vektorraums V ist der K-Vektorraum der Linearformen

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V,K).$$

Für $f_1, f_2 \in V^*$ ist die Summe definiert durch

$$f_1 + f_2 = \big(v \mapsto f_1(v) + f_2(v)\big) : V \to K,$$

und für $\lambda \in K$ und $f \in V^*$ ist die Skalarmultiplikation

$$\lambda f = \big(v \mapsto \lambda f(v)\big) : V \to K.$$

Beispiel 1.16. Jetzt sind wir in der Lage, das tautologische Beispiel einer Paarung anzugeben. Dies ist die Paarung

$$\begin{aligned} V^* \times V &\to K \\ f, v &\mapsto f(v), \end{aligned}$$

die **Auswertung** genannt wird. Linearität in $v \in V$ ist äquivalent zur Linearität von f. Linearität in $f \in V^*$ ist gerade die Definition der K-Vektorraumstruktur auf V^*.

Satz–Definition 1.17. *Die* ***duale Basis*** *zu einer Basis $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V besteht aus dem Tupel $\mathscr{B}^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ von Elementen von V^* mit der Eigenschaft*

$$b_i^*(b_j) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Die b_i^* sind dadurch eindeutig bestimmt und $\mathscr{B}^*$ ist eine Basis von V^*.

Beweis. Lineare Abbildungen sind eindeutig durch die Werte auf einer Basis bestimmt, und beliebige Werte auf der Basis können zu einer (daher) eindeutigen linearen Abbildung fortgesetzt werden. Dies zeigt die Existenz und Eindeutigkeit der b_i^*.

Ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^* = 0$, so folgt durch Einsetzen von b_j, daß bereits

$$0 = \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^*\Big)(b_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^*(b_j) = \lambda_j$$

alle Koeffizienten 0 sind. Die $b_1^*, \ldots, b_n^*$ sind linear unabhängig.

Wir zeigen nun, daß die b_i^* den Dualraum V^* erzeugen. Sei dazu $f \in V^*$ beliebig. Dann gilt

$$f = \sum_{i=1}^n f(b_i) b_i^* \tag{1.3}$$

denn beide Seiten nehmen auf der Basis $\mathscr{B}$ dieselben Werte an:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} f(b_i)b_i^*\Big)(b_j) = \sum_{i=1}^{n} f(b_i)b_i^*(b_j) = f(b_j).$$

$\square$

Bemerkung 1.18. Die Formel in (1.3) ist nur für endlichdimensionale Vektorräume sinnvoll, da in der Algebra ohne weiteres nur endlich Summen gebildet werden können.

Korollar 1.19. *Ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, dann gilt*

$$\dim_K(V^*) = \dim_K(V).$$

Beweis. Basis und Dualbasis haben die gleiche Anzahl Vektoren. $\square$

Mittels des Dualraums läßt sich die Bilinearität einer Paarung alternativ wie folgt beschreiben.

Lemma–Definition 1.20. *Zu einer Paarung von K-Vektorräumen*

$$(\ , \ ) : V \times W \to K$$

gehören die ***adjungierten*** *linearen Abbildungen*

$$\begin{aligned} \ell : V &\to W^* \\ v &\mapsto (v, -) = \big(w \mapsto (v,w)\big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} r : W &\to V^* \\ w &\mapsto (-, w) = \big(v \mapsto (v,w)\big). \end{aligned}$$

Beweis. Wir behandeln nur $V \to W^*$, denn der Fall $W \to V^*$ ist analog.

Die Abbildung $w \mapsto (v,w)$ ist linear in w, da $(\ , \ )$ linear im zweiten Argument ist. Die Zuordnung $v \mapsto (v,-)$ ist linear per Definition der K-Vektorraumstruktur des Dualraums W^* vermöge punktweiser Addition und Skalarmultiplikation, weil $(\ , \ )$ linear im ersten Argument ist. $\square$

Proposition 1.21. *Sei $(\ , \ ) : V \times W \to K$ eine Paarung endlichdimensionaler K-Vektorräume, und sei $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V und $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ eine Basis von W. Sei*

$$A = \mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}((\ , \ )) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$$

die Gram'sche Matrix. Dann werden die adjungierten Abbildungen durch die folgenden Matrizen beschrieben:

(1) *die adjungierte Abbildung $r : W \to V^*$ durch die Matrix*

$$\mathrm{M}^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}^*}(r) = A \in \mathrm{M}_{n\times m}(K),$$

(2) *und die adjungierte Abbildung $\ell : V \to W^*$ durch die Matrix*

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}^*}(\ell) = A^t \in \mathrm{M}_{m\times n}(K).$$

Beweis. (1) Für die j-te Spalte von $\mathrm{M}^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}^*}(r)$ müssen wir $r(c_j)$ in der Basis $\mathscr{B}^*$ ausdrücken. Aus (1.3) folgt

$$r(c_j) = \sum_{i=1}^{n} r(c_j)(b_i)b_i^* = \sum_{i=1}^{n} (b_i, c_j)b_i^*$$

und damit

$$\mathrm{M}^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}^*}(r) = A \in \mathrm{M}_{n\times m}(K),$$

wie behauptet.

(2) Für die j-te Spalte von $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}^*}(\ell)$ müssen wir $\ell(b_j)$ in der Basis $\mathscr{C}^*$ ausdrücken. Aus (1.3) folgt

$$\ell(b_j) = \sum_{i=1}^{m} \ell(b_j)(c_i)c_i^* = \sum_{i=1}^{m} (b_j, c_i)c_i^*$$

und damit

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}^*}(\ell) = A^t \in \mathrm{M}_{m\times n}(K),$$

wie behauptet. □

1.4. **Kerne und perfekte Paarungen.** Nicht alle Paarungen sind gleich 'gut', das Extrembeispiel ist sicher die Nullpaarung, deren Wert konstant 0 ist. Auf der anderen Seite, und viel nützlicher, befinden sich die nichtausgearteten bzw. perfekten Paarungen.

Definition 1.22. Sei $(\ ,\ ) : V \times W \to K$ eine Paarung von K-Vektorräumen.

(1) Eine **links-(bzw. rechts-)nichtausgeartete** Paarung ist eine Paarung $V \times W \to K$, so daß für alle $v \in V$, $v \neq 0$ ein $w \in W$ gibt (bzw. $w \in W$, $w \neq 0$ ein $v \in V$ gibt) mit

$$(v, w) \neq 0.$$

(2) Die Paarung heißt **nichtausgeartet**, wenn sie links- und rechts-nichtausgeartet ist.

(3) Eine **perfekte Paarung** ist eine Paarung $V \times W \to K$, so daß die adjungierten Abbildungen

$$V \to W^* \quad \text{und} \quad W \to V^*$$

Isomorphismen von K-Vektorräumen sind.

Lemma–Definition 1.23. *Sei $(\ ,\ ) : V \times W \to K$ eine Paarung von K-Vektorräumen.*

*(1) Der **Linkskern** von $(\ ,\ )$ ist der Untervektorraum von V*

$$W^\perp = \{v \in V \ ;\ (v, w) = 0 \text{ für alle } w \in W\}.$$

*(2) Der **Rechtskern** von $(\ ,\ )$ ist der Untervektorraum von W*

$$V^\perp = \{w \in W \ ;\ (v, w) = 0 \text{ für alle } v \in V\}.$$

Beweis. Wir müssen zeigen, daß $W^\perp$ und $V^\perp$ Untervektorräume sind. Aus Symmetriegründen reicht der Fall $W^\perp$. Seien $v, v' \in W^\perp$ und $\lambda \in K$. Dann gilt für alle $w \in W$

$$(v + v', w) = (v, w) + (v', w) = 0$$
$$(\lambda v, w) = \lambda(v, w) = 0,$$

und somit auch $v + v' \in W^\perp$ und $\lambda v \in W^\perp$. □

Proposition 1.24. *Sei $(\ ,\ ) : V \times W \to K$ eine Paarung von K-Vektorräumen. Dann gilt*

(1) $W^\perp = \ker(V \to W^*)$ und es sind äquivalent:
  - *(a) die adjungierte Abbildung $V \to W^*$ ist injektiv,*
  - *(b) $W^\perp = 0$,*
  - *(c) $(\ ,\ )$ ist links-nichtausgeartet.*

(2) $V^\perp = \ker(W \to V^*)$ und es sind äquivalent:
  - *(a) die adjungierte Abbildung $W \to V^*$ ist injektiv,*
  - *(b) $V^\perp = 0$,*
  - *(c) $(\ ,\ )$ ist rechts-nichtausgeartet.*

Beweis. (1) $W^\perp = \ker(V \to W^*)$ folgt unmittelbar aus der Definition von $W^\perp$. Die Äquivalenz der Aussagen sieht man wie folgt. (a) $\iff$ (b) ist eine Eigenschaft des Kerns einer linearen Abbildung. Und (b) $\iff$ (c) folgt unmittelbar aus der Definition von links-nichtausgeartet bzw. $W^\perp$.

Aussage (2) gilt aus Symmetriegründen analog zu Aussage (1). □

Bis hierher war alles 'formal'. Der folgende Satz 1.25 nutzt die Theorie der Dimension von Vektorräumen z.B. über den Satz, daß injektive Abbildungen zwischen Vektorräumen der gleichen endlichen Dimension schon Isomorphismen sein müssen.

Satz 1.25. *(1) Eine perfekte Paarung ist nichtausgeartet.*
(2) Sei $(\ ,\ ) : V \times W \to K$ *eine Paarung von* K*-Vektorräumen. Sind* V *und* W *endlichdimensional, so sind äquivalent:*
- *(a)* $(\ ,\ )$ *ist perfekt.*
- *(b)* $(\ ,\ )$ *ist nichtausgeartet.*
- *(c)* $(\ ,\ )$ *ist links-nichtausgeartet und* $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.
- *(d)* $(\ ,\ )$ *ist rechts-nichtausgeartet und* $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.
- *(e) Zu jeder Wahl von Basen* $\mathscr{B}$ *von* V *und* $\mathscr{C}$ *von* W *ist die Gram'sche Matrix von* $(\ ,\ )$ *quadratisch und hat Determinante* $\neq 0$.
- *(f) Zu einer Wahl von Basen* $\mathscr{B}$ *von* V *und* $\mathscr{C}$ *von* W *ist die Gram'sche Matrix von* $(\ ,\ )$ *quadratisch und hat Determinante* $\neq 0$.

Beweis. (1) Ist $(\ ,\ )$ perfekt, so sind die adjungierten Abbildungen Isomorphismen, also insbesondere injektiv. Nach Proposition 1.24 folgt, daß $(\ ,\ )$ nichtausgeartet ist. Aussage (2) zeigen wir durch (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ ((c) und (d)) $\Longrightarrow$ ((c) oder (d)) $\Longrightarrow$ (e) $\Longrightarrow$ (f) $\Longrightarrow$ (a).

(a) $\Longrightarrow$ (b): Dies haben wir in (1) bewiesen.

(b) $\Longrightarrow$ ((c) und (d)): Sei $(\ ,\ )$ nichtausgeartet. Dann sind die adjungierten Abbildungen $V \to W^*$ und $W \to V^*$ injektiv und somit

$$\dim_K(V) \leq \dim_K(W^*) = \dim_K(W) \leq \dim_K(V^*) = \dim_K(V),$$

so daß (c) und (d) gelten. Der nächste Schritt nach ((c) oder (d)) ist trivial.

(c) oder (d) $\Longrightarrow$ (e): Wir dürfen annehmen, daß Aussage (c) gilt. Mit Aussage (d) ist die Argumentation analog. Dann ist

$$\ell : V \to W^*$$

injektive lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen der gleichen Dimension, also ein Isomorphismus. Nach Basiswahl von V und W wird $\ell : V \to W^*$ durch die transponierte A^t zur Gram'sche Matrix A beschrieben, siehe Proposition 1.21. Eine Matrix beschreibt einen Isomorphismus genau dann, wenn die Determinante $\neq 0$ ist. Da $\det(A) = \det(A^t)$ folgt Aussage (e).

(e) $\Longrightarrow$ (f): Das ist trivial.

(f) $\Longrightarrow$ (a): Wenn die Gram'sche Matrix A quadratisch ist und $\det(A) \neq 0$ gilt, dann sind lineare Abbildungen, die in Koordinaten durch Multiplikation mit A oder A^t dargestellt werden, Isomorphismen. Dies trifft nach Proposition 1.21 auf die adjungierten Abbildungen zur Paarung $(\ ,\ )$ zu. Also ist $(\ ,\ )$ eine perfekte Paarung. $\square$

Korollar 1.26 (Riesz'scher Darstellungssatz)**.** *Sei* $(\ ,\ ) : V \times W \to K$ *eine nichtausgeartete Paarung endlichdimensionaler Vektorräume. Dann ist jede Linearform*

$$f : W \to K$$

für ein eindeutiges $v \in V$ *von der Form*

$$f(w) = (v, w)$$

für alle $w \in W$.

Beweis. Nach Satz 1.25 ist $(\ ,\ )$ sogar eine perfekte Paarung. Demnach ist die adjungierte Abbildung $V \to W^*$ ein Isomorphismus und dies beinhaltet genau die Aussage des Korollars. $\square$

Korollar 1.27. *Ist* $(\ ,\ ) : V \times W \to K$ *eine nichtausgeartete Paarung von* K*-Vektorräumen endlicher Dimension, dann gilt*

$$\dim_K(V) = \dim_K(W).$$

Beweis. Nach Satz 1.25 ist (,) sogar eine perfekte Paarung und Aussage (c) liefert das Gewünschte. □

Beispiel 1.28. Das Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle : K^n \times K^n \to K$ hat als Gram'sche Matrix bezüglich der Standardbasis die Einheitsmatrix. Somit definiert das Standardskalarprodukt eine perfekte Paarung. Insbesondere ist jede Linearform auf K^n von der Form

$$\langle v, - \rangle$$

für ein eindeutiges $v \in K^n$.

Bemerkung 1.29. Im endlichdimensionalen ist der Riesz'sche Darstellungssatz in Form des Korollars 1.26 kein schwieriger Satz. Dies ändert sich, wenn man zu unendlichdimensionalen topologischen Vektorräumen und stetigen Linearformen übergeht.

Beispiel 1.30. Für einen K-Vektorraum V endlicher Dimension ist die Auswertungspaarung

$$V^* \times V \to K$$

eine perfekte Paarung. Die adjungierten Abbildungen zur Auswertungspaarung sind die Identität $V^* \to V^*$ und die Abbildung $\iota : V \to (V^*)^*$ aus Aufgabe 1.2.

Man kann dies aus Satz 1.25 folgern: weil $\ell : V^* \to V^*$ die Identität ist und $\dim(V^*) = \dim(V)$, so ist (c) erfüllt, damit die Paarung perfekt und die Abbildung ι ein Isomorphismus.

1.5. **Perfekte Paarungen sind endlich-dimensional.** Wenn man das Auswahlaxiom akzeptiert, und das tun wir in diesem Zusatzabschnitt, dann haben auch alle unendlichdimensionalen Vektorräume eine Basis. Außerdem sind alle Basen gleichmächtig, so daß es einen sinnvollen Dimensionsbegriff gibt. Im unendlichdimensionalen Fall ist die Dimension eine unendliche Kardinalzahl. Von der Theorie der Kardinalzahlen braucht man nur, daß es eine transitive $<$-Relation gibt und für eine unendliche Kardinalzahl α die Ungleichung

$$\alpha < 2^\alpha$$

gilt. Dabei ist 2^α die Mächtigkeit der Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) einer Menge mit Mächtigkeit α.

Aufbauend darauf zeigen wir in diesem Anschnitt den folgenden Satz.

Satz 1.31. *Sei $V \times W \to K$ eine perfekte Paarung von K-Vektorräumen. Dann sind*

$$\dim_K(V) = \dim_K(W) < \infty$$

gleich und endlich.

Beweis. In Satz 1.25 haben wir bereits gesehen, daß für endlich-dimensionale V und W diese endliche Dimension gleich sein muß. Es reicht also der Symmetrie wegen einzusehen, daß $\dim_K(V) < \infty$ gilt.

Wenn die Paarung perfekt ist, so folgt per Definition $V \simeq W^*$ und $W \simeq V^*$. Dann führt Satz 1.32 mit

$$\dim_K V < \dim_K V^* = \dim_K W < \dim_K W^* = \dim_K V$$

zu einem Widerspruch. □

Satz 1.32. *Sei V ein unendlichdimensionaler K-Vektorraum. Dann ist*

$$\dim_K(V) < \dim_K(V^*).$$

Beweis. Wir wählen eine Basis v_i mit $i \in I$ von V. Ein Element $f \in V^*$ ist eindeutig durch die Werte $f(v_i)$ festgelegt, und jede Vorgabe führt zu einer Linearform. Damit ist die Abbildung

$$V^* \to \prod_{i \in I} K$$
$$f \mapsto (f(v_i))_{i \in I}$$

ein K-Vektorraumisomorphismus. Die Behauptung folgt also nun aus Satz 1.33. □

Satz 1.33. *Sei J eine unendliche Menge und K ein Körper. Dann ist*

$$\dim_K(\prod_{j \in J} K) > |J|.$$

Beweis. Sei $\mathbb{F} \subseteq K$ der Primkörper, also der kleinste Teilkörper von K. Das ist entweder $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p. In jedem Fall ist $\mathbb{F}$ höchstens abzählbar unendlich. Dann gilt

$$\dim_{\mathbb{F}}(\prod_{j \in J} \mathbb{F}) = |\prod_{j \in J} \mathbb{F}| \geq 2^{|J|} > |J|,$$

und somit gilt der Satz für $K = \mathbb{F}$. Es reicht nun zu zeigen, daß für eine Körpererweiterung $\mathbb{F} \subseteq K$ gilt

$$\dim_K(\prod_{j \in J} K) \geq \dim_{\mathbb{F}}(\prod_{j \in J} \mathbb{F}).$$

Sei dazu v_i mit $i \in I$ eine Basis von $\prod_{j \in J} \mathbb{F}$. Wegen $\mathbb{F} \subseteq K$ können wir die v_i für alle $i \in I$ auch als Vektoren in $\prod_{j \in J} K$ auffassen. Wir müssen zeigen, daß diese auch K-linear unabhängig sind.

Dies zeigen wir durch Widerspruch und nehmen an, daß für eine endliche Teilmenge

$$B = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \subseteq I$$

die Vektoren v_β mit $\beta \in B$ über K linear abhängig sind.

Für jede endliche Teilmenge $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq J$ sei

$$\mathrm{pr}_{A,K} : \prod_{j \in J} K \to K^n$$
$$(\lambda_j) \mapsto (\lambda_{\alpha_1}, \ldots, \lambda_{\alpha_n})$$

die Projektion auf die Koordinaten mit Index in A. Wir betrachten die K-lineare Abbildung

$$f_{A,K} : K^m \to \prod_{j \in J} K \xrightarrow{\mathrm{pr}_{A,K}} K^n$$

gegeben durch

$$f_{A,K}(\lambda_{\beta_1}, \ldots, \lambda_{\beta_m}) = \mathrm{pr}_{A,K}(\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{\beta_\nu} v_{\beta_\nu}).$$

Der Kern

$$V_{A,K} := \ker(f_{A,K})$$

enthält genau die Koeffizienten für Linearkombinationen von v_β mit $\beta \in B$, die zu Einträgen 0 in den Koordinaten mit Indices aus A führen. Insbesondere ist

$$(\lambda_{\beta_1}, \ldots, \lambda_{\beta_m}) \in \bigcap_{A \subseteq J,\ \text{endlich}} V_{A,K} \iff \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{\beta_\nu} v_{\beta_\nu} = 0.$$

Weil wir annehmen, daß die v_β mit $\beta \in B$ über K linear abhängig sind, gilt

$$\bigcap_{A \subseteq J,\ \text{endlich}} V_{A,K} \neq (0).$$

Insbesondere gilt für alle A

$$\dim_K V_{A,K} > 0.$$

Wir bezeichnen mit $\mathrm{pr}_{A,\mathbb{F}}$, $f_{A,\mathbb{F}}$ und $V_{A,\mathbb{F}}$ die analogen linearen Abbildungen mit K ersetzt durch $\mathbb{F}$. Dies geht, weil die Koordinaten der v_β aus $\mathbb{F}$ sind. Außerdem haben $f_{A,\mathbb{F}}$ und $f_{A,K}$ die gleiche Matrixbeschreibung bezüglich der Standardbasen. Das ist die entscheidende Beobachtung. Für den Rang einer Matrix und damit für die Dimension des Kerns der zugehörigen linearen Abbildung ist es unerheblich, ob wir die Matrix in $\mathrm{M}_{m \times n}(\mathbb{F})$ oder $\mathrm{M}_{m \times n}(K)$ betrachten, denn der Rang wird durch das Nichtverschwinden einer Unterdeterminante (Minors) bestimmt. Daraus folgt

$$\dim_{\mathbb{F}} V_{A,\mathbb{F}} = \dim_K V_{A,K}.$$

Weil die v_β in $\prod_{j \in J} \mathbb{F}$ linear unabhängig sind, muß gelten

$$\bigcap_{A \subseteq J,\ \text{endlich}} V_{A,\mathbb{F}} = \left\{ (\lambda_{\beta_1}, \ldots, \lambda_{\beta_m}) \in \mathbb{F}^m \ ; \ \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{\beta_\nu} v_{\beta_\nu} = 0 \right\} = (0).$$

Außerdem gilt für $A, A' \subseteq J$

$$V_{A,\mathbb{F}} \cap V_{A',\mathbb{F}} = V_{A \cup A',\mathbb{F}}.$$

Da die Dimension $\dim_{\mathbb{F}} V_{A,\mathbb{F}}$ nur endlich viele Werte annehmen kann, wird der minimale Wert angenommen: gibt es ein endliches A_0, so daß für alle endlichen $A \subseteq J$ gilt

$$\dim_{\mathbb{F}} V_{A_0,\mathbb{F}} \leq \dim_{\mathbb{F}}(V_{A,\mathbb{F}}).$$

Wenden wir dies auf $A \cup A_0$ and, so folgt

$$V_{A_0 \cup A,\mathbb{F}} = V_{A_0,\mathbb{F}} \cap V_{A,\mathbb{F}} \subseteq V_{A_0,\mathbb{F}}$$

und wegen Minimalität der Dimension schon Gleichheit. Damit ist für alle A

$$V_{\mathbb{F},A_0} \subseteq V_{\mathbb{F},A}$$

also

$$V_{\mathbb{F},A_0} \subseteq \bigcap_{A \subseteq J,\ \text{endlich}} V_{\mathbb{F},A} = (0).$$

Dies ist der gesuchte Widerspruch zu $\dim_{\mathbb{F}} V_{A,\mathbb{F}} = \dim_K V_{A,K} > 0$. □

Übungsaufgaben zu §1

Übungsaufgabe 1.1. Sei $V = \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ und $W = \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ Vektorräume von Matrizen mit Einträgen im Körper K. Für $A \in V$ und $B \in W$ definieren

$$(A,B)_1 := \mathrm{Sp}(AB)$$

und

$$(A,B)_2 := \mathrm{Sp}(BA)$$

Paarungen $V \times W \to K$. Zeigen Sie, daß $(\ , \ )_1 = (\ , \ )_2$ gilt.

Übungsaufgabe 1.2. Sei V ein K-Vektorraum. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : V &\to (V^*)^* \\ v &\mapsto (f \mapsto f(v)). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß ι eine injektive K-lineare Abbildung ist, und daß ι sogar ein Isomorphismus ist, sofern $\dim_K(V) < \infty$.

Übungsaufgabe 1.3. Bestimmen Sie für einen K-Vektorraum V die adjungierten Abbildungen zur Auswertungspaarung $V^* \times V \to K$.

Übungsaufgabe 1.4. Zeigen Sie: Mittels der Dualbasis zur Basis $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ des K-Vektorraums V läßt sich der Koordinatenisomorphismus

$$\kappa_{\mathscr{B}} : V \xrightarrow{\sim} K^n$$

schreiben als

$$v \mapsto \begin{pmatrix} b_1^*(v) \\ \vdots \\ b_n^*(v) \end{pmatrix}.$$

Es gilt also insbesondere

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i^*(v) b_i. \tag{1.4}$$

Übungsaufgabe 1.5. Finden Sie ein Beispiel einer nichtausgearteten Paarung, die nicht perfekt ist.

Übungsaufgabe 1.6. Auf den stetig differenzierbare periodische Funktionen

$$C^1(\mathrm{S}^1, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f(x+1) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \text{ und } f \text{ stetig differenzierbar}\}$$

sei durch

$$(f,g) := \int_0^1 f(\vartheta) g'(\vartheta) d\vartheta$$

eine Paarung

$$(\ , \ ) : C^1(\mathrm{S}^1, \mathbb{R}) \times C^1(\mathrm{S}^1, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

definiert. Zeigen Sie, daß die konstanten Funktionen sowohl im Linkskern als auch im Rechtskern liegen.

Übungsaufgabe 1.7. Finden Sie ein Beispiel einer perfekten Paarung $(\ ,\ ) : V \times V \to K$ und einem Untervektorraum $W \subseteq V$, so daß die Einschränkung von $(\ ,\ )$ auf $W \times W \to K$ keine perfekte Paarung mehr ist.

2. Symmetrie von Bilinearformen

2.1. **Involutionen.** Die einfachste Symmetrie ist eine Involution.

Definition 2.1. Eine **Involution** eines K-Vektorraums V ist ein K-linearer Automorphismus

$$T : V \to V$$

mit der Eigenschaft $T \circ T = \mathrm{id}_V$.

Bemerkung 2.2. Eine Involution auf V ist genau eine invertierbare lineare Abbildung $T : V \to V$, die ihr eigenes Inverses ist: $T^{-1} = T$.

Bemerkung 2.3. Eine Involution T auf dem K-Vektorraum V definiert einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V)$$

vermöge

$$1 + 2\mathbb{Z} \mapsto T.$$

Umgekehrt liefert jeder Gruppenhomomrphismus ρ wie oben eine Involution

$$T = \rho(1 + 2\mathbb{Z}).$$

Eine Involution liefert genau das Datum, das zu einer linearen Darstellung der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gehört.

Proposition 2.4. *Sei K ein Körper mit $2 \in K^\times$. Sei V ein K-Vektorraum mit Involution T. Dann ist jeder Vektor $v \in V$ eindeutig eine Summe*

$$v = v_+ + v_-$$

mit einem symmetrischen Vektor v_+, d.h. $T(v_+) = v_+$, und einem antisymmetrischen Vektor v_-, d.h. $T(v_-) = -v_-$.

Beweis. Wir setzen $v_\pm = \frac{1}{2}\big(v \pm T(v)\big)$. Dann gilt

$$v_+ + v_- = \frac{1}{2}\big(v + T(v)\big) + \frac{1}{2}\big(v - T(v)\big) = v$$

und

$$T(v_\pm) = \frac{1}{2}\big(T(v) \pm T(T(v))\big) = \frac{1}{2}\big(T(v) \pm v\big) = \pm\frac{1}{2}\big(v \pm T(v)\big) = \pm v_\pm,$$

dies zeigt die Existenz. Für die Eindeutigkeit nehmen wir an, daß $w_\pm$ die gleichen Eigenschaften hat. Dann liegt

$$v_+ - w_+ = w_- - v_-$$

gleichzeitig im Eigenraum von T zum Eigenwert 1 und -1. Dies tut einzig der Nullvektor, denn $1 \neq -1$, und so gilt $v_+ = w_+$ und $v_- = w_-$. Dies zeigt die Eindeutigkeit. $\square$

Bemerkung 2.5. Das Minimalpolynom $p_T(X)$ einer Involution T teilt

$$X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$$

wegen $T^2 - 1 = 0$. Wenn $2 \in K^\times$, dann gilt $1 \neq -1$ und die beiden Linearfaktoren sind verschieden. Daraus folgt schon nach der Theorie der Normalformen für Matrizen, daß

$$V = V_1 \oplus V_{-1}$$

wobei V_λ der Eigenraum von T zum Eigenwert λ ist.

Wenn $2 \notin K^\times$, also $2 = 0$ in K gilt, dann ist $X^2 - 1 = (X-1)^2$ und T kann zum Beispiel die von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

auf K^2 induzierte Involution sein. Dann gibt es die Eigenraumzerlegung aus Proposition 2.4 nicht. Dieses Beispiel zeigt die Notwendigkeit der Voraussetzung $2 \in K^\times$ in Proposition 2.4; nur als Indiz hierfür taugt, daß 2 im Nenner der Formeln im Beweis von Proposition 2.4 auftritt.

Beispiel 2.6. Die Transposition quadratischer Matrizen definiert eine Involution:

$$\begin{aligned}(-)^t : \mathrm{M}_n(K) &\to \mathrm{M}_n(K)\\ A &\mapsto A^t,\end{aligned}$$

denn offensichtlich gilt $(A^t)^t = A$. Wenn $2 \in K^\times$, dann ist

$$A = A_+ + A_-$$

mit A_+ symmetrisch und A_- antisymmetrisch definiert durch:

$$\begin{aligned}A_+ &= \frac{1}{2}(A + A^t),\\ A_- &= \frac{1}{2}(A - A^t).\end{aligned}$$

Definition 2.7. Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt

(1) **symmetrisch**, wenn $A^t = A$,
(2) **antisymmetrisch** (oder **schiefsymmetrisch**), wenn $A^t = -A$,
(3) **alternierend**, wenn $A^t = -A$ und die Diagonaleinträge von A sind gleich 0.

Bemerkung 2.8. Die Begriffe alternierend und antisymmetrisch für Matrizen $A \in \mathrm{M}_n(K)$ sind äquivalent sobald $2 \in K^\times$.

Sei A antisymmetrisch, also $A^t = -A$. Sei a_{ii} der i-te Diagonaleintrag von A. Dann ist $2a_{ii}$ der i-te Diagonaleintrag von $A^t + A = 0$ und damit $2a_{ii} = 0$. Da $2 \in K^\times$ folgt $a_{ii} = 0$ und A ist sogar alternierend.

Die andere Richtung, alternierende Matrizen sind antisymmetrisch, ist per Definition immer richtig.

2.2. **Symmetrische Bilinearformen.** Wir spezialisieren nun Paarungen zu Bilinearformen.

Definition 2.9. Eine **Bilinearform** auf einem K-Vektorraum V ist eine Paarung

$$(\ ,\ ) : V \times V \to K.$$

Bemerkung 2.10. Auf dem K-Vektorraum der Bilinearformen

$$\mathscr{L}(V, V; K)$$

definiert das Vertauschen der Argumente eine Involution:

$$\begin{aligned}\tau : \mathscr{L}(V, V; K) &\to \mathscr{L}(V, V; K)\\ (\ ,\ ) &\mapsto (\ ,\ )^\tau,\end{aligned}$$

wobei $(\ ,\ )^\tau$ für $v, w \in V$ definiert ist durch

$$(v, w)^\tau := (w, v).$$

Es handelt sich in der Tat um eine Involution, denn für $f \in \mathscr{L}(V, V; K)$ und alle $v, w \in V$ gilt

$$(f^\tau)^\tau(v, w) = f^\tau(w, v) = f(v, w),$$

und τ ist K-linear wegen der punktweisen Definition von Addition und Skalarmultiplikation. Nach Proposition 2.4 zerlegt sich eine Bilinearform in die Summe aus einer symmetrischen und einer antisymetrischen Bilinearform, wenn $2 \in K^\times$ in K.

Definition 2.11. Eine **symmetrische Bilinearform** auf einem K-Vektorraum V ist eine Paarung

$$(\ ,\ ) : V \times V \to K,$$

so daß für alle $v, w \in V$ gilt:

$$(v, w) = (w, v).$$

Proposition 2.12. *Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathscr{B}$ und Bilinearform $(\ ,\ ) : V \times V \to K$. Dann ist $(\ ,\ )$ symmetrisch genau dann, wenn die Gram'sche Matrix bezüglich $\mathscr{B}$ symmetrisch ist:*

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}((\ ,\ ))^t = \mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}((\ ,\ )).$$

Beweis. Sei $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V. Dann ist $\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}((\ ,\ ))$ symmetrisch genau dann, wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt

$$(b_i, b_j) = (b_j, b_i). \tag{2.1}$$

Ist $(\ ,\ )$ symmetrisch, so gilt (2.1). Umgekehrt folgt aus der Symmetrie auf Basisvektoren wie in (2.1) schon die Symmetrie für beliebige Vektoren $v = \sum_i x_i b_i$ und $w = \sum_i y_i b_i$ durch die Rechnung

$$\begin{aligned}(v, w) = (\sum_i x_i b_i, \sum_j y_j b_j) &= \sum_{i,j} x_i y_j (b_i, b_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j (b_j, b_i) = (\sum_j y_j b_j, \sum_i x_i b_i) = (w, v).\end{aligned}$$

□

Wir zeigen nun eine Variante der Binomischen Formeln.

Satz 2.13. *Sei $(\ ,\ )$ eine symmetrische Bilinearform auf dem K-Vektorraum V. Dann gilt für alle $v, w \in V$ die* ***Polarisationsformel****:*

$$2(v, w) = (v + w, v + w) - (v, v) - (w, w)$$

Beweis. Wegen Bilinearität gilt

$$(v + w, v + w) = (v, v + w) + (w, v + w) = (v, v) + (v, w) + (w, v) + (w, w),$$

und die Symmetrie zeigt $(v, w) + (w, v) = 2(v, w)$. Hieraus folgt die Polarisationsformel. □

Bemerkung 2.14. Die Polarisationsformel zeigt, daß eine symmetrische Bilinearform $(\ ,\ )$ auf dem K-Vektorraum V durch die Werte (v, v) für alle $v \in V$ eindeutig bestimmt ist, sofern $2 \in K^\times$ in K gilt.

2.3. Antisymmetrische und alternierende Bilinearformen.

Definition 2.15. (1) Eine **antisymmetrische** (oder **schiefsymmetrische**) **Bilinearform** auf einem K-Vektorraum V ist eine Paarung

$$(\ ,\ ) : V \times V \to K,$$

so daß für alle $v, w \in V$ gilt:

$$(v, w) = -(w, v).$$

(2) Eine **alternierende Bilinearform** auf einem K-Vektorraum V ist eine Paarung

$$(\ ,\ ) : V \times V \to K,$$

so daß für alle $v \in V$ gilt:

$$(v, v) = 0.$$

Beispiel 2.16. (1) Sei $C^1(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der einmal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, und sei $V \subseteq C(\mathbb{R})$ der Unterraum derjenigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1)$. Auf V definiert für $f, g \in V$

$$(f, g) := \int_0^1 f(x) g'(x) dx$$

eine antisymmetrische und sogar alternierende Bilinearform. Wegen

$$(f, g) + (g, f) = \int_0^1 f(x)g'(x) + g(x)f'(x) dx = \int_0^1 (fg)'(x) dx = fg(1) - fg(0) = 0$$

liegt Antisymmetrie vor. Alternierend zu sein, folgt aus allgemeinen Gründen, da in $\mathbb{R}$ nicht $2 = 0$ gilt, oder aber aus der Kettenregel

$$(f, f) = \int_0^1 f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f^2(1) - \frac{1}{2}f^2(0) = 0.$$

(2) Auf $V = K^2$ definiert

$$(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) := \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

eine antisymmetrische und sogar alternierende Bilinearform. Dies folgt aus den Eigenschaften der Determinantenfunktion.

Satz 2.17. *Eine alternierende Bilinearform ist antisymmetrisch. Falls $2 \in K^\times$ ist, dann gilt auch umgekehrt: antisymmetrische Bilinearformen sind alternierend.*

Beweis. Sei $(\ ,\ ) : V \times V \to K$ eine alternierende Bilinearform. Dann gilt für alle $v, w \in V$

$$(v, w) + (w, v) = (v + w, v + w) - (v, v) - (w, w) = 0,$$

somit ist $(\ ,\ )$ antisymmetrisch.

Sei nun $2 \in K^\times$ und $(\ ,\ )$ antisymmetrisch. Dann gilt für alle $v \in V$

$$(v, v) = -(v, v)$$

oder $2(v, v) = 0$, und weil man durch 2 dividieren kann auch $(v, v) = 0$. Somit ist $(\ ,\ )$ auch alternierend. □

Bemerkung 2.18. Je nach Anwendungsgebiet ist die Voraussetzung $2 \in K^\times$ oft, oder, wenn Sie zum Beispiel ein Computer sind, selten erfüllt.

Proposition 2.19. *Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathscr{B}$ und Bilinearform $(\ ,\ ) : V \times V \to K$. Dann ist $(\ ,\ )$ antisymmetrisch (bzw. alternierend) genau dann, wenn die Gram'schen Matrix bezüglich $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ antisymmetrisch (bzw. alternierend) ist.*

Beweis. Der Beweis für antisymmetrische Bilinearformen ist analog zum Beweis von Proposition 2.12.

Sei $(\ ,\ )$ alternierend. Dann ist $(\ ,\ )$ nach Satz 2.17 auch antisymmetrisch und die Gram'sche Matrix $A = \mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}((\ ,\ ))$ antisymmetrisch. Die Diagonaleinträge von A sind von der Form $(v, v) = 0$ für Basisvektoren v. Somit ist A sogar alternierend.

Ist umgekehrt die Gram'sche Matrix $A = \mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}((\ ,\ ))$ der Bilinearform $(\ ,\ )$ alternierend, dann gilt für $v = \sum_i x_i b_i$

$$\begin{aligned}(v, v) = \big(\sum_i x_i b_i, \sum_j x_j b_j\big) &= \sum_{i,j} x_i x_j (b_i, b_j) \\ &= \sum_i x_i^2 (b_i, b_i) + \sum_{i<j} x_i x_j \big((x_i, x_j) + (x_j, x_i)\big) = 0,\end{aligned}$$

und somit ist $(\ ,\ )$ eine alternierende Bilinearform. □

Theorem 2.20 (Struktursatz für perfekte alternierede Formen)**.** *Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Bilinearform $(\ ,\ )$. Dann ist $(\ ,\ )$ alternierend und perfekt genau dann, wenn es eine Basis $\mathscr{B} = (b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots, b_n, c_n)$ von V gibt, bezüglich derer die Gram'sche Matrix von $(\ ,\ )$ die Blockdiagonalform*

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}((\ ,\ )) = \begin{pmatrix} H & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & H \end{pmatrix}$$

mit der folgenden 2×2*-Matrix hat:*

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten gilt:

$$(b_i, b_j) = (c_i, c_j) = 0 \quad \text{und } (b_i, c_j) = -(c_j, b_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Beweis. Die angegebene Matrix ist alternierend, so daß eine Bilinearform mit dieser Gram'schen Matrix nach Proposition 2.19 alternierend ist. Außerdem ist ihre Determinante $\det(H)^n \neq 0$, somit ist die Bilinearform perfekt nach Satz 1.25.

Sei nun umgekehrt $(\ , \ )$ alternierend und perfekt. Sei $b \in V$ beliebig mit $b \neq 0$. Da $(\ , \ )$ perfekt ist, gibt es $w \in V$ mit $\lambda = (b, w) \neq 0$ in K. Wir setzen $c = \frac{1}{\lambda} w$ und erhalten

$$(b, c) = 1.$$

Da $(\ , \ )$ alternierend ist, kann c kein Vielfaches von b sein, und der Unterraum $U = \langle b, c \rangle$ von V hat Dimension 2. Eingeschränkt auf U hat $(\ , \ )$ bezüglich der durch b, c gegebenen Basis die Gram'sche Matrix H.

Die Abbildung $\rho : V \to U^*$ gegeben durch

$$v \mapsto \rho(v) := \big((v, -)|_U : U \to K \big)$$

ist surjektiv: die Einschränkung auf U ist die zur Einschränkung $(\ , \ )|_{U \times U}$ gehörende adjungierte Abbildung, welche in der durch b, c gegebenen Basis durch die transponierte zur Gram'schen Matrix, also die invertierbare Matrix H^t dargestellt wird. Wir setzen $U^\perp = \ker(\rho)$. Da $\rho|_U$ Isomorphismus ist, gilt $U \cap U^\perp = \ker(\rho|_U) = 0$. Weiter gilt nach der Dimensionsformel für Bild und Kern

$$\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(\mathrm{im}(\rho)) + \dim(\ker(\rho)) = \dim(V),$$

und so schließen wir genauer, daß

$$V = U \oplus U^\perp$$

eine direkte Summenzerlegung ist.

Für $u \in U$ und $v \in U^\perp$ gilt nun per Definition $(u, v) = -(v, u) = 0$. Damit hat die Gram'sche Matrix von $(\ , \ )$ zu einer Basis $\mathscr{B}$ von V, die durch Fortsetzung von b, c mit einer Basis $\mathscr{C}$ von $U^\perp$ entsteht, die Blockform

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}((\ , \ )) = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

mit

$$A = \mathrm{M}^{\mathscr{C},\mathscr{C}}((\ , \ )|_{U^\perp \times U^\perp}.$$

Dann ist

$$0 \neq \det(\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}((\ , \ ))) = \det(H) \cdot \det(A)$$

und $(\ , \ )|$ eingeschränkt auf $U^\perp$ ist immer noch perfekt, und alternierend.

Nun argumentieren wir per Induktion nach $\dim_K(V)$. Der Induktionsanfang für den Null-Vektorraum $V = (0)$ ist klar, und da $\dim_K(U^\perp) = \dim_K(V) - 2$ haben wir oben den Induktionsschritt beweisen, wenn wir die Basis $\mathscr{C}$ von $U^\perp$ wie im Satz behauptet wählen und A Blockdiagonalform mit Diagonaleinträgen H bekommt. $\square$

Korollar 2.21. *Eine endlichdimensionaler* K*-Vektorraum mit einer perfekten alternierenden Paarung hat gerade Dimension.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Theorem 2.20. $\square$

Übungsaufgaben zu §2

Übungsaufgabe 2.1. Ein **Projektor** auf einem K-Vektorraum V ist ein K-linearer Endomorphismus $p : V \to V$ mit $p^2 = p$. Zeigen Sie:

(1) Jeder Projektor p definiert eine Zerlegung von V als direkte Summe vermöge
$$V = \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p).$$
(2) Zu einer Zerlegung von V als direkte Summe $V = U \oplus W$ gehört genau ein Projektor p mit $\ker(p) = U$ und $\operatorname{im}(p) = W$.
(3) Mit p ist auch $1 - p$ ein Projektor.
(4) Das Vertauschen der Summanden in der Zerlegung $V = U \oplus W$ entspricht der Involution $p \mapsto 1 - p$ auf der Menge der Projektoren auf V.

Übungsaufgabe 2.2. Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$. Sei $T : V \to V$ eine Involution eines K-Vektorraums V. Sei V_λ der Eigenraum von T zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, daß bezüglich T die Eigenraumzerlegung
$$V = V_1 \oplus V_{-1}$$
gilt und
$$\begin{aligned} p_\pm : V &\to V \\ v &\mapsto \frac{1}{2}\big(v \pm T(v)\big) \end{aligned}$$
die Projektoren auf V_1 und V_{-1} sind.

Übungsaufgabe 2.3. Sei K ein Körper mit $2 = 0$. Dann definiert
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
eine Involution auf K^2. Zeigen Sie, daß es keine Zerlegung in symmetrische und anti-symmetrische Anteile gibt.

Übungsaufgabe 2.4. Beschreiben Sie eine symmetrische Bilinearform, bezüglich derer die Polarisationsformel aus Satz 2.13 zu einer binomischen Formel wird.

3. Orthogonalität

3.1. **Orthogonalität.** Letztendlich wollen wir mit Bilinearformen Geometrie betreiben und dazu von Längen und Winkeln sprechen. Der Begriff der Orthogonalität ist ein Vorgriff hierauf. Zur Motivation betrachten wir das Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf dem $\mathbb{R}^n$ und definieren die Länge eines Vektors
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$
als
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$
und den Abstand von $x, y \in \mathbb{R}^n$ als
$$d(x,y) := \|x - y\|.$$

Elementargeometrisch motiviert sagen wir, daß x und y orthogonal aufeinander stehen, wenn y denselben Abstand von x wie von $-x$ hat. Es gilt nun

$$\begin{aligned} d(y,x) &= d(y,-x) \\ \iff \|y-x\|^2 &= \|y+x\|^2 \\ \iff \langle y-x, y-x\rangle &= \langle y+x, y+x\rangle \\ \iff \langle y,y\rangle - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle &= \langle y,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle \\ \iff 4\langle x,y\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Dies erheben wir in der allgemeinen Situation zur Definition. Man beachte, daß die Äquivalenzumformungen die Symmetrie des Standardskalarproduktes benutzen.

Definition 3.1. Sei V ein K-Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $(\ ,\ )$. Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen **orthogonal**, wenn

$$(v,w) = 0$$

gilt. Als Notation vereinbaren wir $v \perp w$, wenn v und w orthogonal sind.

Bemerkung 3.2. (1) Orthogonalität ist kein Begriff des Vektorraums alleine, sondern hängt ab von dem Paar $\big(V, (\ ,\ )\big)$.
(2) Da wir $(\ ,\ )$ als symmetrisch vorausgesetzt haben, gilt $v \perp w \iff w \perp v$. Die Relation 'orthogonal' ist symmetrisch, aber nicht transitiv.

Beispiel 3.3. (1) Bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n sind verschiedene Standardbasisvektoren e_i und e_j für $i \neq j$ orthogonal, denn $\langle e_i, e_j\rangle = 0$.
(2) Ein Vektor kann zu sich selbst orthogonal sein (sogar bei einer perfekten Bilinearform): bezüglich der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die symmetrische Bilinearform $(v,w)_A = v^t A w$ auf K^2. Dann ist für $i = 1,2$

$$\langle e_i, e_i\rangle = 0$$

und somit sind beide Standardbasisvektoren orthogonal zu sich selbst.

Dies ist ein Beispiel einer perfekten Bilinearform, die eingeschränkt auf einen linearen Unterraum (hier von e_i aufgespannt) nicht mehr perfekt ist.

Lemma–Definition 3.4. *Sei V ein K-Vektorraum und $(\ ,\ )$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Der **Orthogonalraum** zu einem K-Untervektorraum $U \subseteq V$ ist der K-Untervektorraum von V*

$$U^\perp = \{v \in V \ ; \ (v,u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Beweis. Wir müssen zeigen, daß die Teilmenge $U^\perp$ ein K-Untervektorraum ist. Mit $v, w \in U^\perp$ und $\lambda, \mu \in K$ für ein beliebiges $u \in U$

$$(\lambda v + \mu w, u) = \lambda(v,u) + \mu(w,u) = 0,$$

und somit $\lambda v + \mu w \in U^\perp$. Wegen $0 \in U^\perp$ ist $U^\perp$ auch nicht leer. Damit ist $U^\perp$ ein K-Untervektorraum. □

Bemerkung 3.5. (1) Für eine symmetrische Bilinearform $(\ ,\ ) : V \times V \to K$ sind Linkskern und Rechtskern identisch und stimmen mit dem Orthogonalraum $V^\perp$ zum ganzen Vektorraum V überein. Die doppeldeutige Notation $V^\perp$ ist also ungefährlich.

(2) Man kann Orthogonalität auch für nicht notwendig symmetrische Bilinearformen oder allgemeiner für Paarungen definieren. Dann muß man aber zwischen linksorthogonal und rechtsorthogonal unterscheiden.

Im Beweis von Theorem 2.20 wurde die Notation $U^\perp$ in diesem Sinne verwendet. Man beachte, daß für antisymmetrische Bilinearformen auch linksorthogonal und rechtsorthogonal als Begriffe zusammenfallen. Für alternierende Bilinearformen gilt per Definition gerade $v \perp v$ für alle Vektoren v.

3.2. **Orthogonalbasen und Diagonalform.**

Definition 3.6. Eine Orthogonalbasis eines K-Vektorraums V mit Bilinearform $(\ ,\ )$ ist eine Basis $\mathscr{B}$ von V, so daß je zwei verschiedene Basisvektoren $b \neq b'$ aus $\mathscr{B}$ orthogonal zueinander sind in dem Sinne, daß

$$(b, b') = 0 = (b', b).$$

Beispiel 3.7. Bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n ist die Standardbasis eine Orthogonalbasis.

Lemma 3.8. *Sei $(\ ,\ )$ eine Bilinearform auf dem K-Vektorraum V mit Basis $\mathscr{B}$. Dann sind äquivalent:*

(a) $\mathscr{B}$ ist Orthogonalbasis für V.

(b) Die zugehörige Gram'sche Matrix $\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}((\ ,\ ))$ von $(\ ,\ )$ ist eine Diagonalmatrix.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Definition einer Orthogonalbasis und der Gram'schen Matrix. □

Theorem 3.9 (Diagonalformensatz)**.** *Sei K ein Körper mit $2 \in K^\times$. Sei $(\ ,\ )$ eine Bilinearform auf dem K-Vektorraum V mit $\dim_K(V) < \infty$. Dann sind äquivalent:*

(a) Die Bilinearform $(\ ,\ )$ ist symmetrisch.

(b) Es gibt eine Orthogonalbasis für V.

(c) Es gibt eine Basis $\mathscr{B}$ von V, so daß die zugehörige Gram'sche Matrix $\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}((\ ,\ ))$ von $(\ ,\ )$ eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Die Äquivalenz (b) $\iff$ (c) folgt aus Lemma 3.8. Da Diagonalmatrizen symmetrisch sind, folgt (c) $\Longrightarrow$ (a) aus Proposition 2.12. Wir müssen nur noch (a) $\Longrightarrow$ (b) zeigen.

Wenn $(\ ,\ )$ die Nullform ist, also für alle $v, w \in V$ die Bilinearform den Wert $(v, w) = 0$ annimmt, dann ist nichts zu tun. Andernfalls zeigt die Polarisationsformel aus Satz 2.13

$$(v, w) = \frac{1}{2}\big((v + w, v + w) - (v, v) - (w, w)\big),$$

die Existenz eines Vektors $v \in V$ mit $(v, v) \neq 0$.

Wir ergänzen v zu einer Basis $\mathscr{C} = (b_1 = v, c_2, c_3, \ldots, c_n)$ von V und setzen für $i = 2, \ldots, n$

$$b'_i = c_i - \frac{(c_i, v)}{(v, v)} v.$$

Dann ist $\mathscr{B}' = (b_1, b'_2, b'_3, \ldots, b'_n)$ auch eine Basis von V (die Vektoren der Basis $\mathscr{C}$ liegen im Spann, also ist $\mathscr{B}'$ ein Erzeugendensystem von $\dim(V)$-vielen Vektoren, also eine Basis) und für $i = 2, \ldots, n$ gilt

$$(b'_i, v) = (c_i, v) - \frac{(c_i, v)}{(v, v)}(v, v) = 0.$$

Der von $b'_2, \ldots, b'_n$ aufgespannte Unterraum $W \subseteq V$ liegt also im Orthogonalraum $\langle v \rangle^\perp$.

Jetzt argumentieren wir per Induktion nach $n = \dim_K(V)$. Der Induktionsanfang ist trivial. Die Einschränkung von $(\ ,\ )$ auf W ist auch eine symmetrische Bilinearform, und wegen $\dim_K(W) = \dim_K(V) - 1$ gibt es per Induktionsannahme eine Orthogonalbasis $b_2, \ldots, b_n$ von W. Damit ist aber $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthogonalbasis von V und Ausssage (b) gezeigt.

In der Tat gilt $(b_1, b_i) = 0$ für $i \geq 2$, da $b_i \in v^\perp$. Und für $i \neq j$ mit $i, j \geq 2$ gilt $(b_i, b_j) = 0$ per Induktionsannahme. Im Spann von $\mathscr{B}$ liegt die Basis $\mathscr{B}'$, damit ist $\mathscr{B}$ ein Erzeugendensystem aus $\dim(V)$-vielen Vektoren und damit selbst eine Basis. □

Korollar 3.10 (Normalformensatz)**.** *Sei $2 \in K^\times$. Zu einer symmetrischen Matrix $A = A^t \in \mathrm{M}_n(K)$ gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $D \in \mathrm{M}_n(K)$ Diagonalmatrix, so daß*

$$A = S^t D S.$$

Beweis. Wir betrachten die symmetrische Bilinearform $\langle -, - \rangle_A = \langle x, Ay \rangle$. Sei $\mathscr{B}$ eine Orthogonalbasis dafür und $\mathscr{E}$ die Standardbasis. Dann ist

$$D = \mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\langle -, - \rangle_A)$$

eine Diagonalmatrix. Sei $S = \mathrm{M}^{\mathscr{E}}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id})$ die Basiswechselmatrix. Dann ist

$$A = \mathrm{M}^{\mathscr{E},\mathscr{E}}(\langle -, - \rangle_A) = S^t D S$$

wie behauptet. □

3.3. **Anwendung auf quadratische Formen.** Der Diagonalformensatz Theorem 3.9 hat über Korollar 3.10 eine Anwendung auf quadratische Formen.

Definition 3.11. Eine **quadratische Form** in n Variablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Koeffizienten aus einem Körper K ist ein homogenes Polynom vom Grad 2, also ein Ausdruck der Form

$$q(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} X_i X_j.$$

mit $a_{ij} \in K$ für alle $1 \leq i \leq j \leq n$.

Wir setzen $A = (a_{ij})$ mit a_{ij} wie oben, falls $i \leq j$ und 0 falls $i > j$. Sofern $2 \in K^\times$ gilt, definieren wir $Q := \frac{1}{2}(A + A^t)$. Die Matrix Q ist offensichtlich symmetrisch und wird die **zu** q **gehörige symmetrische Matrix** genannt. Die symmetrische Bilinearform auf K^n

$$(x, y)_Q = x^t Q y$$

ist die **zur quadratischen Form gehörende symmetrische Bilinearform**. Es gilt

$$q(X_1, \ldots, X_n) = (\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix})_Q = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}^t Q \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Umgekehrt wird durch eine symmetrische Matrix $Q \in \mathrm{M}_n(K)$ durch die Formel (3.1) eine quadratische Form definiert.

Bemerkung 3.12. Eine quadratische Form $q(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i \leq j} a_{ij} X_i X_j \in K[X_1, \ldots, X_n]$ wird oft mit der quadratischen Polynomfunktion[2] $q : K^n \to K$

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j$$

identifiziert.

---

[2]Hier gibt es eine Subtilität zu beachten. Es besteht ein Unterschied zwischen Polynomen und Polynomfunktionen. Arbeiten wir der Einfachheit halber mit nur einer Variablen X, dann ist ein Polynom ein Element $P(X) \in K[X]$, also formal der Form

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

mit $a_i \in K$, während die zugehörige Polynomfunktion die Abbildung $K \to K$, die $x \in K$ nach der Auswertung

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in K$$

abbildet. Es gibt über endlichen Körpern nichtverschwindende Polynome, deren Poynomfunktion die Nullfunktion ist! Als Beispiel nehmen wir $K = \mathbb{F}_2$ und $P(X) = X + X^2$. Für quadratische Formen tritt das Problem nicht auf.

Proposition 3.13. *Sei $2 \in K^\times$. Sei $q(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{i\leq j} a_{ij}X_iX_j \in K[X_1,\ldots,X_n]$ eine quadratische Form. Dann gibt es eine lineare invertierbare Variablensubstitution*

$$U_i = \sum_{j=1}^n s_{ij}X_j$$

mit der Matrix $S = (s_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$, so daß q in den Variablen U_i Diagonalgestalt annimmt, d.h. es gibt $\lambda_i \in K$ mit

$$q(X_1,\ldots,X_n) = \lambda_1 U_1^2 + \ldots + \lambda_n U_n^2.$$

Beweis. Sei Q wie oben die symmetrische Matrix zur quadratischen Form q. Wie in Korollar 3.10 schreiben wir

$$Q = S^t D S$$

mit einer Diagonalmatrix D und $S \in \mathrm{GL}_n(K)$. Wir setzen

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

und rechnen

$$\begin{aligned} q(X_1,\ldots,X_n) &= \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}^t Q \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}^t S^t D S \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}^t D \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \lambda_1 U_1^2 + \ldots + \lambda_n U_n^2, \end{aligned}$$

wobei $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ die Diagonaleinträge von D sind. □

Bemerkung 3.14. Proposition 3.13 beschreibt das multidimensionale quadratische Ergänzen. Der Fall $n = 2$ läßt sich als eindimensionales quadratisches Ergänzen verstehen: sei

$$q(X,Y) = aX^2 + bXY + cZ^2$$

gegeben, und sei der Einfachheit halber $a \neq 0$. Dann setzen wir formal $T = X/Y$ und betrachten zunächst das quadratische Polynom in T

$$q(X,Y)/Y^2 = q(X/Y,1) = aT^2 + bT + c = a(T + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Zurückübersetzt ergibt sich

$$q(X,Y) = a(X + \frac{b}{2a}Y)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}Y^2,$$

also in der Variablen $U = X + \frac{b}{2a}Y$ und $V = Y$ eine diagonale Form.

Bemerkung 3.15. In der Diagonalgestalt der quadratischen Form, die in Proposition 3.13 erzielt wurde, steckt noch die Auswahl einer bezüglich der von Q definierten Orthogonalbasis. Der Satz von der Hauptachsentransformation 7.1 besagt, daß es hier bevorzugte Wahlen gibt. Dazu später mehr.

Bemerkung 3.16. Sei q eine quadratische Form in n-Variablen $X_1,\ldots,X_n$ mit zugehöriger symmetrischer Matrix $Q \in \mathrm{M}_n(K)$. Eine lineare Variablentransformation, die q in Diagonalgestalt bringt, berechnet man wie folgt. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß Q eine invertierbare Matrix ist.

Schritt 1: Man bestimmt eine Orthogonalbasis $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ bezüglich $(\ ,\ )_Q$ auf K^n. Dazu startet man mit einer beliebigen Basis und wendet das Gram-Schmidt Verfahren aus Satz 3.23 an. Da man a priori nicht weiß, daß $(\ ,\ )_Q$ anisotrop ist, hat man keine Garantie, daß das Gram-Schmidt Verfahren durchführbar ist. Die Chancen sind aber mehr als gut (die Ausnahmen haben Maß 0), und wenn es doch Probleme gibt, verfährt man wie im Beweis von Theorem 3.9.

Schritt 2: Gesucht ist die Basiswechselmatrix $S = \mathrm{M}^{\mathscr{E}}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id})$. Leichter ist allerdings

$$S^{-1} = \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{E}}(\mathrm{id}) = (b_1, \ldots, b_n)$$

wobei letzteres als die Matrix mit Spalten $b_1, \ldots, b_n$ aufgefaßt werden soll.

Schritt 3: Diese Matrix $T = S^{-1}$ muß nun invertiert werden. Aufgrund der speziellen Form geht das leichter als üblich. Da die Spalten paarweise orthogonal sind bezüglich $(\ ,\ )_Q$, gilt

$$\begin{aligned} T^tQT = T^t(Qb_1, \ldots, Qb_n) &= (\langle b_i, Qb_j\rangle)_{1\le i,j\le n} \\ &= ((b_i, b_j)_Q)_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix} (b_1,b_1)_Q & & \\ & \ddots & \\ & & (b_n,b_n)_Q \end{pmatrix} =: D. \end{aligned}$$

(Die leeren Einträge sind wie üblich 0, das kommt von der Orthogonalität der Basis.) Da Q als invertierbar angenommen wurde ist auch $D = T^tQT$ invertierbar (alle $(b_i, b_i)_Q \neq 0$). Damit ist

$$S = T^{-1} = D^{-1}T^tQ$$

und anstelle von T ist nur die Diagonalmatrix D zu invertieren und zwei Matrixmultiplikationen sind auszuführen. Das ist viel einfacher.

Schritt 4: Die neuen Variablen sind nun

$$U_i = \sum_{j=1}^n S_{ij}X_j$$

und die quadratische Form nimmt die folgende Gestalt an:

$$q(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n (b_i, b_i)_Q \cdot U_i^2.$$

Sei K ein Körper. Ein Vertretersystem von K modulo den Quadraten $(K^\times)^2$ ist eine Teilmenge $\Lambda \subseteq K$, so daß jedes Element $x \in K$ von der Form

$$x = \lambda a^2$$

mit $a \in K^\times$ und eindeutigem $\lambda \in \Lambda$ ist.

Satz 3.17. *Sei K ein Körper mit $2 \in K^\times$. Sei $\Lambda \subseteq K$ ein Vertretersystem von K modulo den Quadraten $(K^\times)^2$. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.*

Zu jede symmetrische Bilinearform $(\ ,\ )$ auf V gibt es eine Orthogonalbasis, bezüglicherer die Gram'scher Matrix nur Einträge aus Λ hat.

Beweis. Wir wählen zunächst nach Theorem 3.9 eine Orthogonalbasis $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_n)$. Wir schreiben die Diagonaleinträge $x_i = (c_i, c_i)$ in der Form

$$x_i = \lambda_i a_i^2$$

mit $\lambda_i \in \Lambda$ und $a_i \in K^\times$. Mit

$$b_i = \frac{1}{a_i} c_i$$

ist $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ auch eine Orthogonalbasis, und zwar mit

$$(b_i, b_i) = \frac{1}{a_i^2}(c_i, c_i) = \frac{x_i}{a_i^2} = \lambda_i.$$

Die Basis $\mathscr{B}$ hat die gesuchten Eigenschaften. □

Beispiel 3.18. (1) Für $K = \mathbb{R}$ kann man $\Lambda = \{-1, 0, 1\}$ nehmen. Jede symmetrische Bilinearform eines endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums hat eine Orthogonalbasis, deren Gram'sche Matrix nur $1, 0$ oder -1 auf der Diagonalen hat.

(2) Für $K = \mathbb{C}$ kann man $\Lambda = \{0, 1\}$ nehmen.

(3) Für $K = \mathbb{Q}$ kann man als Λ die Menge der quadratfreien ganze Zahlen und 0 nehmen. Eine ganze Zahl n heißt quadratfrei, wenn es keine ganze Zahl $d > 1$ gibt, so daß $d^2 \mid n$. Äquivalent dazu tritt in der Primfaktorzerlegung von einem quadratfreien $n \in \mathbb{Z}$ jede Primzahl höchstens einmal auf.

3.4. **Anisotropie.**

Definition 3.19. Sei V ein K-Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $(\ ,\ )$. Ein **anisotroper** Vektor ist ein $v \in V$ mit

$$(v, v) \neq 0.$$

Ein **isotroper** Vektor ist ein $v \in V$ mit $(v, v) = 0$.

Die Bilinearform $(\ ,\ )$ heißt anisotrop, wenn alle $v \in V$, $v \neq 0$ anisotrop sind.

Bemerkung 3.20. Eine anisotrope symmetrische Bilinearform ist nicht-ausgeartet. Zu jedem Vektor $v \neq 0$ ist gerade $w = v$ selbst ein Partner mit $(v, w) \neq 0$.

Beispiel 3.21. Sei $K = \mathbb{R}$.

(1) Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist anisotrop, denn für $v = \sum_i x_i e_i \neq 0$ ist stets

$$\langle v, v\rangle = \sum_i x_i^2 > 0.$$

(2) Die Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist nicht anisotrop. Der Vektor $v = e_1 + e_2$ ist isotrop:

$$\langle v, v\rangle = \langle e_1, e_1\rangle + \langle e_2, e_2\rangle = 1 - 1 = 0.$$

Proposition 3.22. *Sei V ein K-Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $(\ ,\ )$.*

(1) Ein Vektor $v \in V$ ist anisotrop genau dann, wenn $V = \langle v\rangle \oplus v^\perp$ eine direkte Summe ist.
(2) Ist $(\ ,\ )$ perfekt, dann besteht jede Orthogonalbasis aus anisotropen Vektoren.

Beweis. (1) Wenn $V = \langle v\rangle \oplus v^\perp$, dann ist $v \notin v^\perp$ und damit $(v, v) \neq 0$.

Sei umgekehrt v anisotrop, dann ist $\langle v\rangle \cap v^\perp = 0$, und die Linearform

$$f_v := (v, -) : V \to K$$

ist surjektiv. Nach der Kern/Bild–Dimensionsformel gilt dann

$$\dim(v^\perp) = \dim(\ker(f_v)) = \dim(V) - \dim(K) = \dim(V) - 1.$$

Damit ist V die direkte Summe der Unterräume $\langle v\rangle$ und $v^\perp$.

(2) Sei A die Gram'sche Matrix bezüglich einer Orthogonalbasis zu $(\ ,\ )$. Wenn ein Basisvektor isotrop ist, dann ist der entsprechende Diagonaleintrag 0 und $\det(A) = 0$ im Widerspruch dazu, daß $(\ ,\ )$ perfekt ist. □

Theorem 3.9 hat für anisotrope symmetrische Bilinearformen einen konstruktiven Beweis. Der Beweis beinhaltet einen Algorithmus, der im anisotropen Fall aus einer beliebigen Basis eine Orthogonalbasis macht.

Satz 3.23 (Gram–Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren)**.** *Sei V ein K-Vektorraum mit einer anisotropen symmetrische Bilinearform $(\ ,\ )$. Sei $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von V. Wir konstruieren für $j = 0, \ldots, n$ eine Basis $\mathscr{B}^{(j)} = (b_1, \ldots, b_j, c_{j+1}, \ldots, c_n)$ durch*

$$b_j = c_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(c_j, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i.$$

Die Basis $\mathscr{B} = \mathscr{B}^{(n)}$ ist eine Orthogonalbasis von V bezüglich $(\ ,\ )$.

Beweis. Per Induktion nach j zeigen wir, daß $\mathscr{B}^{(j)}$ eine Basis ist. Für $j = 0$ gilt dies nach Annahme an $\mathscr{C}$. Sei $\mathscr{B}^{(j-1)}$ eine Basis. Nach der Definition von $\mathscr{B}^{(j)}$ ist klar, daß der Spann von $\mathscr{B}^{(j)}$ gleich dem Spann von $\mathscr{B}^{(j-1)}$ ist. Daher ist $\mathscr{B}^{(j)}$ ein Erzeugendensystem aus $\dim(V)$-vielen Vektoren, also eine Basis.

Da $(\, , \,)$ anisotrop ist, sind alle auftretenden Nenner von 0 verschieden. Die Konstruktion ist wohldefiniert.

Wir zeigen nun per Induktion nach j, daß für $k < j$ stets $(b_k, b_j) = 0$ gilt. Für $j = 1$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen an, die Behauptung ist wahr für $j-1$, und rechen dann

$$\begin{aligned}(b_k, b_j) = (b_k, c_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(c_j, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i) &= (b_k, c_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(c_j, b_i)}{(b_i, b_i)} (b_k, b_i) \\ &= (b_k, c_j) - \frac{(c_j, b_k)}{(b_k, b_k)} (b_k, b_k) = 0.\end{aligned}$$

Dies zeigt, daß der Algorithmus mit einer Orthogonalbasis endet. □

Bemerkung 3.24. Der Basiswechsel $S = \mathrm{M}^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id})$ von der Basis $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{B}$ aus Satz 3.23 ist eine unipotente (nur 1 auf der Diagonalen) obere Dreiecksmatrix. In der Tat gilt

$$c_j = b_j + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(c_j, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i,$$

so daß $S = (s_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ mit

$$s_{ij} = \begin{cases} \frac{(c_j, b_i)}{(b_i, b_i)} & i < j, \\ 1 & i = j, \\ 0 & i > j. \end{cases}$$

Mit S ist auch S^{-1}, die Basiswechselmatrix $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(\mathrm{id})$, eine obere Dreiecksmatrix, denn die Menge der oberen Dreiecksmatrizen ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$.

Bemerkung 3.25. Das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren hat in Satz 3.23 als Voraussetzung, daß die Bilinearform $(\, , \,)$ anisotrop sein muß. Dies ist nötig, damit der Algorithmus beweisbar eine Orthogonalbasis liefert und nicht wegen einer undurchführbaren Division durch 0 vorzeitig zum Stehen kommt.

Ohne die Voraussetzung 'anisotrop' kann man den Algorithmus aber **trotzdem auf gut Glück versuchen** in der Hoffnung, daß keiner der produzierten Basisvektoren b_i isotrop ist.

Ist b_i leider isotrop, dann muß man eben wie im Induktionsschritt des Beweises von Theorem 3.9 verfahren und ein neues b_i wählen. Als ersten Versuch permutiere man die noch zu orthogonalisierenden restlichen Basisvektoren (man ändere die Reihenfolge).

3.5. **Orthogonale Zerlegung.** In Linearer Algebra 1 wurde das Konzept der **inneren direkten Summe** behandelt. Dieses wollen wir hier durch die direkte Summe ergänzen.

Definition 3.26. Die **direkte Summe** zweier K-Vektorräumen W_1 und W_2 ist der K-Vektorraum der Paare

$$W_1 \oplus W_2 := \{(w_1, w_2) \ ; \ w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

Man spricht von einer **Zerlegung als direkte Summe** eines K-Vektorraums V, wenn man K-Vektorräume W_1, W_2 und einen Isomorphismus

$$V \simeq W_1 \oplus W_2$$

angibt.

Beispiel 3.27. Die innere direkte Summe ist ein Beispiel für eine direkte Summenzerlegung. Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ zwei Untervektorräume. Dann ist V die innere direkte Summe von W_1 mit W_2, geschrieben ebenso als

$$V = W_1 \oplus W_2,$$

sofern $W_1 \cap W_2 = (0)$ und $W_1 + W_2 = V$. Genauer bedeutet dies, daß die Summenabbildung von der direkten Summe (nicht der inneren direkten Summe)

$$s : W_1 \oplus W_2 \to V$$

definiert durch $(w_1, w_2) \mapsto s(w_1, w_2) = w_1 + w_2$ ein Isomorphismus ist: bezüglich einer inneren direkten Summe zerlegt sich jeder Vektor $v \in V$ (s ist surjektiv) eindeutig (s ist injektiv) als Summe $v = w_1 + w_2$ mit $w_i \in W_i$ für $i = 1, 2$.

Beispiel 3.28. Seien V_1 und V_2 zwei K-Vektorräume. In $V_1 \oplus V_2$ gibt es die Unterräume

$$W_1 = \{(v_1, 0) \ ; \ v_1 \in V_1\},$$
$$W_2 = \{(0, v_2) \ ; \ v_2 \in V_2\}.$$

Offensichtlich gilt $W_1 \cap W_2 = (0)$ und $W_1 + W_2 = V_1 \oplus V_2$, so daß $V_1 \oplus V_2$ als innere direkte Summe von W_1 und W_2 betrachtet werden kann.

Die Projektionen auf den i-ten Faktor im Tupel (v_1, v_2), also $\mathrm{pr}_i(v_1, v_2) = v_i$ induzieren Isomorphismen

$$\mathrm{pr}_i|_{W_i} : W_i \xrightarrow{\sim} V_i.$$

Wenn man diese natürlichen Isomorphismen benutzt, um mißbräuchlich W_i mit V_i zu identifizieren, so wird aus der direkten Summe der V_i eine innere direkte Summe der V_i. Dies dient anfänglich der Verwirrung, nutzt aber später zur Verschlankung der Notation.

Aufgrund der beiden Beispiele und den daraus folgenden naheliegenden Identifikationen, wird oft der Unterschied zwischen der inneren direkten Summe und der direkten Summe ignoriert.

Ebenso kann man Vektorräume mit symmetrischer Bilinearform in direkte Summen zerlegen. Der richtige Begriff, der bei der Zerlegung die symmetrische Bilinearform berücksichtigt, ist die orthogonale Summe.

Definition 3.29. Die **orthogonale Summe** zweier K-Vektorräume V_i mit symmetrischer Bilinearform $f_i : V_i \times V_i \to K$, für $i = 1, 2$, ist der K-Vektorraum der direkten Summe

$$V = V_1 \oplus V_2$$

mit der symmetrischen Bilinearform $f : V \times V \to K$ definiert für alle

$$v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in V_1 \oplus V_2$$

durch

$$f(v, w) = f_1(v_1, w_1) + f_2(v_2, w_2).$$

Bemerkung 3.30. (1) Die Definition von f in Definition 3.29 ist offensichtlich bilinear und symmetrisch.

(2) Wir identifizieren wie in Beispiel 3.28 V_i mit Unterräumen von V. Die Unterräume $V_i \subseteq V$ sind orthogonal: $V_1 \subseteq V_2^{\perp}$ und $V_2 \subseteq V_1^{\perp}$, und die Einschränkung von f auf V_i ist f_i. Dies begründet den Namen orthogonale Summe.

Definition 3.31. Ein K-Vektorraum V mit symmetrischer Bilinearform $f : V \times V \to K$ ist die **innere orthogonale Summe**

$$V = W_1 \perp W_2$$

zweier Unterräume $W_1, W_2 \subseteq V$ ausgestattet mit der Einschränkung $f_i = f|_{W_i \times W_i}$ für $i = 1, 2$, wenn

(i) $V = W_1 \oplus W_2$ die innere direkte Summe von Vektorräumen ist,

(ii) und der Isomorphismus 'Summenabbildung' $s : (W_1, f_1) \perp (W_2, f_2) \to (V, f)$ mit den Bilinearformen verträglich ist: für alle

$$v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in W_1 \perp W_2$$

gilt

$$f(v, w) = f_1(v_1, w_1) + f(v_2, w_2).$$

Mit andern Worten ist $V = W_1 \oplus W_2$ innere direkte Summe und $W_1 \subseteq W_2^{\perp}$ (äquivalent $W_2 \subseteq W_1^{\perp}$ oder symmetrisch: für alle $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ gilt $f(w_1, w_2) = 0$).

Notation 3.32. Als Notation für die orthogonale Summe findet man Verschiedenes, etwa

$$V_1 \oplus^{\perp} V_2 \quad \text{oder} \quad V_1 \perp V_2.$$

Man kann eine orthogonale Summenzerlegung der Gram'schen Matrix ablesen, sofern die Basis aus Basen der Summanden durch Vereinigung entsteht.

Proposition 3.33. *Sei $V = V_1 \perp V_2$ die orthogonale Summe zweier K-Vektorräume V_i mit symmetrischer Bilinearform f_i, für $i = 1, 2$. Seien $\mathscr{B}_i$ Basen von V_i bezüglich derer f_i die Gram'sche Matrix A_i hat. Dann hat f bezüglich der Basis*[3] *$\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ die Gram'sche Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

als Blockmatrix.

Insbesondere ist f perfekt genau dann, wenn f_1 und f_2 perfekt sind.

Beweis. Die Aussage zur Gram'schen Matrix von f ist klar. Dann gilt

$$\det(A) = \det(A_1) \det(A_2).$$

Es ist f (bzw. f_i) perfekt genau dann, wenn $\det(A) \in K^{\times}$ (bzw. $\det(A_i) \in K^{\times}$). Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 3.34. Sei $2 \in K^{\times}$ und $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform. Theorem 3.9 besagt nun, daß V eine orthogonale Summe von 1-dimensionalen K-Vektorräumen mit symmetrischer Bilinearform ist. Es gibt nämlich eine Orthogonalbasis $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, und dann ist mit $V_i = \langle b_i \rangle$

$$V = V_1 \perp \ldots \perp V_n$$

eine orthogonale Summe.

Definition 3.35. Ein **orthogonales Komplement** eines Untervektorraums U in einem K-Vektorraum V mit symmetrischer Bilinearform $f : V \times V \to K$ ist ein Untervektorraum $W \subseteq V$, so daß V (mit f) die orthogonale Summe

$$V = U \perp W$$

bezüglich der eingeschränkten symmetrischen Bilinearformen $f|_{U \times U}$ und $f|_{W \times W}$ ist.

Proposition 3.36. *Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit anisotroper symmetrischer Bilinearform $(\ ,\ )$, und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.*

(1) *$U^{\perp}$ ist ein orthogonales Komplement.*
(2) *Das orthogonale Komplement ist eindeutig.*

[3] Notationsmißbrauch! Eine Basis ist keine Menge, sondern ein Tupel. Die Ordnung ist wichtig, denn sie bestimmt zum Beispiel die Reihenfolge der Koordinaten. Wir verstehen unter $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ dasjenige Tupel, das aus $\mathscr{B}_1$ durch Anhängen des Tupels $\mathscr{B}_2$ entsteht.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $U^\perp$ ein orthogonales Komplement ist. Für $u \in U \cap U^\perp$ gilt $(u,u) = 0$. Da $(\, , \,)$ anisotrop ist, schließen wir $u = 0$, oder $U \cap U^\perp = 0$.

Jede Linearform auf U läßt sich zu einer Linearform auf V fortsetzen (Basisergänzungssatz). Daher ist die Einschränkungsabbildung

$$\begin{aligned} V^* &\twoheadrightarrow U^* \\ f &\mapsto f|_U \end{aligned}$$

surjektiv. Die adjungierten Abbildung $V \to V^*$ zu $(\, , \,)$ ist ein Isomorphismus (anisotrop impliziert nicht-ausgeartet, siehe Bemerkung 3.20, und damit perfekt nach Satz 1.25). Die Komposition

$$\begin{aligned} V &\to U^* \\ v &\mapsto (v,-)|_U = \big(u \mapsto (v,u)\big) \end{aligned}$$

ist damit auch surjektiv mit Kern $U^\perp$. Wir berechnen aus der Kern/Bild–Dimensionsformel

$$\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U^*) = \dim(V) - \dim(U). \tag{3.2}$$

Damit haben U und $U^\perp$ trivialen Schnitt und sind von komplementärer Dimension. Somit ist

$$V = U \oplus U^\perp.$$

Daß diese direkte Summe sogar orthogonale Summe ist, folgt aus der Definition von $U^\perp$.

Jetzt zeigen wir die Eindeutigkeit des orthogonalen Komplements. Sei W ein orthogonales Komplement von U. Dann ist $W \subseteq U^\perp$ und

$$\dim(W) = \dim(V) - \dim(U) = \dim(U^\perp).$$

Damit ist $W \subseteq U^\perp$ eine Inklusion von K-Vektorräumen gleicher Dimension, also $W = U^\perp$. □

Übungsaufgaben zu §3

Übungsaufgabe 3.1. Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Relation $v \perp w$ nicht transitiv ist.

Übungsaufgabe 3.2. Sei W ein K-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform $(\, , \,)$, und seien U, V zwei Untervektorräume von W. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) $U \subseteq V^\perp$ ist äquivalent zu $V \subseteq U^\perp$.
(2) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$.
(3) Wenn $U \subseteq V$, dann gilt $V^\perp \subseteq U^\perp$.
(4) $U^\perp$ enthält den Kern (Links- wie Rechtskern) von $(\, , \,)$.

Übungsaufgabe 3.3. Sei $A = A^t \in \mathrm{M}_n(K)$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, daß es ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so daß $S^t A S$ Diagonalmatrix ist.

Übungsaufgabe 3.4. Zeigen Sie, daß über Körpern mit $2 = 0$, d.h. Körpern der Charakteristik 2, die Bilinearform auf K^2 zur Matrix

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

keine Orthogonalbasis besitzt, also bezüglich keiner Basis die Gram'sche Matrix eine Diagonalmatrix ist.

Übungsaufgabe 3.5. Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n \subseteq \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Für reelle Zahlen $a < b$ statten wir V_n mit der symmetrischen Bilinearform $(\, , \,)_{[a,b]}$ aus, die auf Polynomen $f, g \in \mathbb{R}[X]$ den Wert

$$(f,g)_{[a,b]} := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

annimmt.

(1) Zeigen Sie, daß $(\ ,\ )_{[a,b]}$ anisotrop ist.
(2) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement von V_1 in V_2 für $(\ ,\ )_{[0,1]}$.

Übungsaufgabe 3.6. Bringen Sie die quadratische Form in den Variablen X, Y, Z

$$q(X,Y,Z) = 2XY + 2YZ + 2ZX$$

durch eine lineare Transformation der Variablen in Diagonalgestalt.

4. Spektraltheorie selbstadjungierter Endomorphismen

Spektralsätze geben über Eigenräume und Eigenwerte von Endomorphismen von Vektorräumen Auskunft.

4.1. **Duale Basis II.** In Gegenwart einer perfekten symmetrischen Bilinearform gibt es nicht nur im Dualraum eine duale Basis. Der Notationsmißbrauch kann verkraftet werden, weil kontextabhängig klar ist, ob die duale Basis des Daulraums oder die duale Basis im folgenden Sinne gemeint ist.

Lemma–Definition 4.1. *Sei $(V,(\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen Bilinearform. Die **duale Basis** zu einer Basis $\mathscr{B} = (b_1,\ldots,b_n)$ bezüglich $(\ ,\ )$ ist die Basis $\mathscr{B}^* = (b_1^*,\ldots,b_n^*)$ mit der Eigenschaft*

$$(b_i, b_j^*) = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

Beweis. Zu jedem $1 \leq j \leq n$ definieren wir die Linearform f_j auf V durch Vorgabe auf $\mathscr{B}$

$$f_j(b_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

Der Riesz'sche Darstellungssatz, Korollar 1.26, garantiert die Existenz und Eindeutigkeit von Vektoren b_j^* mit

$$f_j = (-, b_j^*).$$

Wir müssen nur noch einsehen, daß $\mathscr{B}^* = (b_1^*,\ldots,b_n^*)$ eine Basis von V ist. Da $\mathscr{B}^*$ die richtige Anzahl an Vektoren hat, genügt die lineare Unabhängigkeit. Sei $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^* = 0$ eine lineare Relation. Dann ist für alle $1 \leq j \leq n$

$$\lambda_j = (b_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^*) = 0,$$

also die Relation trivial. Damit sind die $(b_1^*,\ldots,b_n^*)$ linear unabhängig und $\mathscr{B}^*$ eine Basis. □

Bemerkung 4.2. (1) Die Gram'sche Matrix $\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}^*}((\ ,\ ))$ ist die Einheitsmatrix. Und umgekehrt, wenn für eine weitere Matrix $\mathscr{C}$ die Gram'sche Matrix $\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{C}}((\ ,\ ))$ die Einheitsmatrix ist, dann ist $\mathscr{C} = \mathscr{B}^*$ die duale Basis bzgl. $(\ ,\ )$.
(2) Jede Basis $\mathscr{B}$ ist gleich ihrer doppelt dualen $(\mathscr{B}^*)^*$, da $(\ ,\ )$ symmetrisch ist.
(3) Der Isomorphismus $V \to V^*$, den die adjungierte Abbildung der perfekten Paarung $(\ ,\ )$ induziert, transportiert die duale Basis im Sinne von Lemma-Definition 4.1 in die duale Basis gemäß Satz-Definition 1.17.

Beispiel 4.3. Die Standardbasis des K^n ist gleich der eigenen dualen bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n.

Bemerkung 4.4. Die duale Basis $\mathscr{B}^*$ erlaubt es, die Koordinaten eines Vektors bezüglich $\mathscr{B}$ hinzuschreiben. Für alle $v \in V$ gilt

$$v = \sum_{i=1}^n (v, b_i^*) b_i. \tag{4.1}$$

Man bestimmt die Koeffizienten im Ansatz $v = \sum_i \lambda_i b_i$ durch Anwendung der Linearform $(-, b_j^*)$ als

$$\lambda_j = (\sum_i \lambda_i b_i, b_j^*) = (v, b_j^*).$$

Proposition 4.5. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit symmetrischer anisotroper Bilinearform. Eine Basis $\mathscr{B}$ ist eine Orthogonalbasis genau dann, wenn der Basiswechsel $S = \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}^*}(\mathrm{id})$ durch eine Diagonalmatrix gegeben ist.*

Beweis. Wenn $\mathscr{B}$ orthogonal ist, dann gilt für all $1 \leq i \leq n = \dim(V)$

$$b_i^* = \frac{1}{(b_i, b_i)} b_i,$$

und damit ist S diagonal.

Sei umgekehrt S diagonal, dann ist $b_i^* = \lambda_i b_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ und die Diagonaleinträge $\lambda_i \in K^\times$ sind invertierbar. Dann ist für $i \neq j$

$$(b_i, b_j) = \lambda_j^{-1}(b_i, b_j^*) = 0,$$

und somit $\mathscr{B}$ eine Orthogonalbasis. □

4.2. **Adjungierte Abbildungen.** Eine lineare Abbildung hat bezüglich perfekter Paarungen auf Quelle und Ziel einen Partner, die adjungierte Abbildung.

Satz–Definition 4.6. *Seien $(\ ,\ )_1 : V_1 \times W_1 \to K$ und $(\ ,\ )_2 : V_2 \times W_2 \to K$ perfekte Paarungen von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen, und sei $f : V_1 \to V_2$ eine K-lineare Abbildung. Dann gibt es eine K-lineare Abbildung*

$$f^* : W_2 \to W_1$$

mit der Eigenschaft, daß für alle $v \in V_1$ und $w \in W_2$ gilt:

$$(f(v), w)_2 = (v, f^*(w))_1.$$

Dieses f^* ist eindeutig mit dieser Eigenschaft und heißt die zu f ***adjungierte Abbildung****.*

Beweis. Jedes $w \in W_2$ definiert eine Linearform

$$\begin{aligned} L_w : V_1 &\to K \\ v &\mapsto (f(v), w)_2. \end{aligned}$$

Der Riesz'sche Darstellungssatz, Korollar 1.26, liefert zu jedem $w \in W_2$ ein eindeutiges Element $f^*(w) \in W_1$ mit

$$L_w = (-, f^*(w))_1$$

als Linearformen auf V_1. Die so definierte Abbildung $f^* : W_2 \to W_1$ erfüllt für alle $v \in V_1$ und $w \in W_2$

$$(f(v), w)_2 = (v, f^*(w))_1.$$

Der Eindeutigkeitsteil des Korollars 1.26 zeigt, daß f^* eindeutig festgelegt ist.

Es bleibt zu zeigen, daß f^* linear ist. Dazu betrachten wir $w_1, w_2 \in W_2$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Da für alle $v \in V_1$ gilt

$$\begin{aligned} (v, \lambda_1 f^*(w_1) + \lambda_2 f^*(w_2))_1 &= \lambda_1 (v, f^*(w_1))_1 + \lambda_2 (v, f^*(w_2))_1 \\ &= \lambda_1 (f(v), w_1)_2 + \lambda_2 (f(v), w_2)_2 = (f(v), \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)_2, \end{aligned}$$

werden die Anforderung an $f^*(\lambda w_1 + \mu w_2)$ durch $\lambda_1 f^*(w_1) + \lambda_2 f^*(w_2)$ erfüllt. Die besagte Eindeutigkeit des Riesz'schen Darstellungssatzes zeigt

$$f^*(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda_1 f^*(w_1) + \lambda_2 f^*(w_2),$$

somit ist f^* linear. □

Wir sind eigentlich an Spezialfällen interessiert, siehe unten, aber es ist ein übliches Phänomen, daß die algebraischen Eigenschaften klarer sind, wenn man unnötige Identifikationen vermeidet.

Satz 4.7 (Funktorialität). *(1) Seien $(\ ,\ )_i : V_i \times W_i \to K$ für $i = 1, 2, 3$ perfekte Paarungen von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen, und seien $g : V_1 \to V_2$ und $f : V_2 \to V_3$ zwei K-lineare Abbildung. Dann gilt*

$$(fg)^* = g^* f^* : W_3 \to W_1.$$

(2) Die Identität $\mathrm{id}_V : V \to V$ ist selbstadjungiert: es gilt

$$(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_V\,.$$

Beweis. (1) Dies folgt sofort aus der Rechung für $v \in V_1$ und $w \in W_3$

$$(v, g^*(f^*(w)))_1 = (g(v), f^*(w))_2 = (f(g(v)), w)_3.$$

Aussage (2) ist trivial. □

Wir schränken uns nun auf den Spezialfall $V = V_1 = V_2$ und $W = W_1 = W_2$ ein. Außerdem erlauben wir uns die Nachlässigkeit, in der Notation die Bilinearformen auf V und auf W nicht mehr zu unterscheiden.

Satz 4.8. *Seien $(V, (\ ,\ ))$ und $(W, (\ ,\ ))$ zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume mit perfekten symmetrischen Bilinearformen.*

(1) Die Zuordnung $f \mapsto f^*$ definiert eine K-lineare Abbildung

$$(-)^* : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(W, V).$$

(2) Es gilt $(f^*)^* = f$.

(3) Sei $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V und $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ eine Basis von W. Dann gilt

$$\mathrm{M}^{\mathscr{C}^*}_{\mathscr{B}^*}(f^*) = \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f)^t.$$

Beweis. (1) Sei $f_i : V \to W$ und $\lambda_i \in K$ für $i = 1, 2$. Dann ist für alle $v \in V$ und $w \in W$:

$$\begin{aligned}(v, \lambda_1 f_1^*(w) + \lambda_2 f_2^*(w)) &= \lambda_1 (v, f_1^*(w)) + \lambda_2 (v, f_2^*(w)) \\ &= \lambda_1 (f_1(v), w) + \lambda_2 (f_2(v), w) = ((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v), w).\end{aligned}$$

Die Definition der adjungierten Abbildungen zeigt dann für alle $w \in W$

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^*(w) = \lambda_1 f_1^*(w) + \lambda_2 f_2^*(w),$$

also die Linearität von $(-)^*$.

Aussage (2) folgt aus der Rechnung für alle $v \in V$ und $w \in W$:

$$(v, (f^*)^*(w)) = (f^*(v), w) = (w, f^*(v)) = (f(w), v) = (v, f(w)).$$

Hier geht die Symmetrie von $(\ ,\ )$ ein. In der Tat zeigt Eindeutigkeit in Korollar 1.26 wieder $f(w) = (f^*)^*(w)$ für alle $w \in W$.

(3) Mit (4.1) folgt für alle $1 \le j \le n$

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} (f(b_j), c_i^*) c_i.$$

Wegen Symmetrie ist $\mathscr{B}$ die duale Basis zu $\mathscr{B}^*$. Mit (4.1) folgt für alle $1 \le j \le m$

$$f^*(c_j^*) = \sum_{i=1}^{n} (f^*(c_j^*), b_i) b_i^* = \sum_{i=1}^{n} (c_j^*, f(b_i)) b_i^*.$$

Wieder mit Symmetrie folgt $(f(b_i), c_j^*) = (c_j^*, f(b_i))$, so daß per Definition

$$\mathrm{M}^{\mathscr{C}^*}_{\mathscr{B}^*}(f^*) = \big((c_j^*, f(b_i))\big)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} = \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f)^t.$$

□

Beispiel 4.9. Wir betrachten die Drehung $R(\varphi) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ des $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ. Diese ist bezüglich Standardkoordinaten gegeben durch die Matrix(-multiplikation mit)

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Wir statten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt aus. Dann ist $R(\varphi)^*$ nach Satz 4.8 (3) mit $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ gleich der Standardbasis gegeben durch:

$$D_\varphi^t = D_{-\varphi} = D_\varphi^{-1}.$$

Es gilt also

$$R(\varphi)^* = R(-\varphi) = R(\varphi)^{-1}.$$

Satz 4.10. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit perfekter symmetrischer Bilinearform, und sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann gilt*

(1) $\ker(f^*) = \mathrm{im}(f)^\perp$,
(2) $\ker(f) = \mathrm{im}(f^*)^\perp$,
(3) *f und f^* haben denselben Rang,*

Ist $(\ ,\ )$ anisotrop, so gilt darüber hinaus $V = \mathrm{im}(f) \perp \ker(f^*)$.

Beweis. Weil $(f^*)^* = f$ folgt (2) aus (1) angewandt auf f^*. Aussage (1) folgt aus

$$v \in \ker(f^*) \iff f^*(v) = 0 \iff (-, f^*(v)) = 0 \iff (f(-), v) = 0 \iff v \in \mathrm{im}(f)^\perp.$$

(3) Es gilt mit (1), der Kern/Bild-Dimensionsformel, und (3.2)

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f^*) &= \dim_K(\mathrm{im}(f^*)) = \dim_K(V) - \dim_K(\mathrm{im}(f^*)^\perp) \\ &= \dim_K(V) - \dim(\ker(f)) = \dim_K(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{rg}(f). \end{aligned}$$

Sei nun $(\ ,\ )$ anisotrop. Dann folgt $V = \mathrm{im}(f) \perp \ker(f^*)$ aus Proposition 3.36 und (1). □

Weil sich der Beweis aus dem gerade Diskutierten sofort ergibt, beweisen wir eine altbekannte Tatsache neu.

Korollar 4.11. *Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine beliebige Matrix. Dann ist der Zeilenrang von A gleich dem Spaltenrang von A.*

Beweis. Wir bezeichnen die Matrixmultiplikation mit A durch $f_A : K^n \to K^n$. Wie gewohnt ist $\mathscr{E}$ die Standardbasis. Dann gilt

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}(f_A)) = \mathrm{rg}(f_A) = \mathrm{rg}(f_A^*) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}^{\mathscr{E}^*}_{\mathscr{E}^*}(f_A^*)) = \mathrm{rg}(A^t),$$

wobei entscheidend in der Mitte Satz 4.10 und am Ende Satz 4.8 eingeht. □

4.3. **Normale Abbildungen.** Wir spezialisieren weiter zu $V = W$ und $(\ ,\ ) = (\ ,\ )_1 = (\ ,\ )_2$. Die lineare Abbildung $f \mapsto f^*$ ist eine Involution auf $\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Wir betonen, daß die adjungierte Abbildung von der gewählten perfekten Bilinearform auf V abhängt.

Definition 4.12. Sei $(V, (\ ,\ ))$ eine endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit perfekter symmetrischer Bilinearform.

(1) Ein **normaler Endomorphismus** ist ein K-linearer Endomorphismus $f : V \to V$, der mit seiner adjungierten Abbildung kommutiert:
$$ff^* = f^*f.$$
(2) Ein **selbstadjungierter Endomorphismus** ist ein K-linearer Endomorphismus $f : V \to V$ mit $f = f^*$.

Beispiel 4.13. (1) Da ein Endomorphimus stets mit sich selbst kommutiert, sind selbstadjungierte Endomorphismen normal.
(2) Beispiel 4.9 zeigt, daß die Drehung $D_\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ ein normaler Endomorphismus ist. Insbesondere ist nicht jeder normale Endomorphismus selbstadjungiert.

Satz 4.14. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen Bilinearform, und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann ist f normal genau dann, wenn für alle $v, w \in V$ gilt*

$$(f(v), f(w)) = (f^*(v), f^*(w)). \tag{4.2}$$

Beweis. Es gilt (4.2) genau dann, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$(v, f^*(f(w))) = (v, f(f^*(w))).$$

Nach der Eindeutigkeit aus Korollar 1.26 ist dies äquivalent zu $f^*(f(w)) = f(f^*(w))$ für alle $w \in V$ und damit dazu, daß f normal ist. □

4.4. **Eigenwerte und adjungierte Abbildungen.**

Notation 4.15. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus des K-Vektorraums V, und sei $\lambda \in K$. Der Eigenraum von f zum Eigenwert λ ist der Untervektorraum von V

$$V_\lambda(f) = \{v \in V \ ;\ f(v) = \lambda v\} = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V).$$

Lemma 4.16. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen Bilinearform, und sei $f : V \to V$ ein normaler Endomorphismus. Dann ist für jedes $\lambda \in K$ der Endomorphismus*

$$f - \lambda \operatorname{id}_V$$

auch normal.

Beweis. Es gilt

$$(f - \lambda \operatorname{id}_V)^* = f^* - \lambda \operatorname{id}_V^* = f^* - \lambda \operatorname{id}_V,$$

und so

$$\begin{aligned}(f - \lambda \operatorname{id}_V)(f - \lambda \operatorname{id}_V)^* &= ff^* - \lambda f - \lambda f^* + \lambda^2 \operatorname{id}_V \\ &= f^*f - \lambda f - \lambda f^* + \lambda^2 \operatorname{id}_V = (f - \lambda \operatorname{id}_V)^*(f - \lambda \operatorname{id}_V).\end{aligned}$$

□

Proposition 4.17. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen Bilinearform $(\ ,\ )$, und sei $f \in \operatorname{End}_K(V)$. Wenn $\lambda \neq \mu$, dann sind $V_\lambda(f)$ und $V_\mu(f^*)$ orthogonal.*

Beweis. Sei $v \in V_\lambda(f)$ und $w \in V_\mu(f^*)$. Dann gilt

$$\lambda(v, w) = (f(v), w) = (v, f^*(w)) = \mu(v, w),$$

so daß $(\lambda - \mu)(v, w) = 0$, und wenn $\lambda \neq \mu$ folgt $v \perp w$. □

Proposition 4.18. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen anisotropen Bilinearform $(\ ,\ )$. Sei $f : V \to V$ ein normaler Endomorphismus. Dann ist*

$$V_\lambda(f) = V_\lambda(f^*).$$

Beweis. Es gilt $f(v) = \lambda v$ genau dann, wenn $f(v) - \lambda v = 0$, was wegen der Anisotropie äquivalent ist zu

$$((f - \lambda \operatorname{id}_V)(v), (f - \lambda \operatorname{id}_V)(v)) = 0.$$

Mit f ist nun nach Lemma 4.16 auch $f - \lambda \operatorname{id}_V$ normal und daher gilt mit (4.2)

$$((f-\lambda \operatorname{id}_V)(v), (f-\lambda \operatorname{id}_V)(v)) = ((f-\lambda \operatorname{id}_V)^*(v), (f-\lambda \operatorname{id}_V)^*(v)) = ((f^*-\lambda \operatorname{id}_V)(v), (f^*-\lambda \operatorname{id}_V)(v)).$$

Jetzt argumentieren wir mit f^* anstelle von f rückwärts und finden $f^*(v) = \lambda v$. □

Notation 4.19. Sei $f \in \operatorname{End}_K(V)$ ein Endomorphimus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums. Das **charakteristische Polynom** von f ist

$$P_f(X) = \det(X \cdot \operatorname{id}_V - f) \in K[X].$$

Theorem 4.20 (Der Spektralsatz für zerfallende normale Operatoren)**.** *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit symmetrischer anisotroper Bilinearform, und sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann sind äquivalent:*

(a) *V besitzt eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren für f.*
(b) *$V = V_{\lambda_1}(f) \perp \ldots \perp V_{\lambda_r}(f)$ für die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von f.*
(c) *f ist normal und $P_f(X)$ zerfällt in $K[X]$ in Linearfaktoren.*
(d) *f ist selbstadjungiert und $P_f(X)$ zerfällt in $K[X]$ in Linearfaktoren.*

Beweis. (b) $\Longrightarrow$ (a): Wir wählen für jeden Eigenraum $V_{\lambda_i}(f)$ eine Orthogonalbasis. Diese fügen sich zusammen zu einer Orthogonalbasis von V, da die Eigenräume paarweise zueinander orthogonal sind. Die resultierende Orthogonalbasis besteht aus Eigenvektoren zu f.

(a) $\Longrightarrow$ (d): Sei $\mathscr{B}$ eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren für f. Dann sind

$$A = \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f) \quad \text{und} \quad S = \mathrm{M}^{\mathscr{B}^*}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V)$$

Diagonalmatrizen. Damit kommutieren S und $A = A^t$ und mit Satz 4.8 (3)

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f^*) = S\,\mathrm{M}^{\mathscr{B}^*}_{\mathscr{B}^*}(f^*)S^{-1} = SA^tS^{-1} = SAS^{-1} = A = \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f).$$

Hieraus folgt $f = f^*$. Außerdem zerfällt $P_f(X) = P_A(X)$ als charakteristisches Polynom einer Diagonalmatrix in Linearfaktoren.

(d) $\Longrightarrow$ (c): Das ist trivial.

(c) $\Longrightarrow$ (b): Wir beweisen diesen Schritt per vollständiger Induktion nach $n = \dim_K(V)$. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen nun an, daß Theorem 4.20 für Dimension $< n$ richtig ist. Da $P_f(X)$ in Linearfaktoren zerfällt, gibt es einen Eigenwert λ aus K und einen dazugehörigen Eigenvektor $v \in V$, $v \neq 0$ mit $f(v) = \lambda v$. Nach Proposition 4.18 gilt $V_\lambda(f) = V_\lambda(f^*)$, somit ist v auch Eigenvektor von f^* zum Eigenwert λ.

Da $(\ ,\ )$ anisotrop ist, haben wir mit $W = \langle v \rangle^\perp$ eine orthogonale Zerlegung

$$V = \langle v \rangle \perp W.$$

Für $w \in W$ gilt

$$(v, f(w)) = (f^*(v), w) = \lambda(v, w) = 0$$

und

$$(v, f^*(w)) = (f(v), w) = \lambda(v, w) = 0.$$

Es folgt, daß W ein invarianter Unterraum für f und f^* ist. Sei $h = f|_W$ und $g = f^*|_W$. Dann ist für alle $w_1, w_2 \in W$

$$(h(w_1), w_2) = (f(w_1), w_2) = (w_1, f^*(w_2)) = (w_1, g(w_2)),$$

und das heißt

$$(f|_W)^* = h^* = g = f^*|_W.$$

Damit ist $(W, (\ ,\ )|_{W\times W})$ ein K-Vektorraum mit anisotroper symmetrischer Bilinearform, und $f|_W \in \mathrm{End}_K(W)$ ein normaler Endomorphismus:

$$f|_W \circ (f|_W)^* = f|_W \circ f^*|_W = (f \circ f^*)|_W = (f^* \circ f)|_W = f^*|_W \circ f|_W = (f|_W)^* \circ f|_W$$

In einer zur Zerlegung $V = \langle v \rangle \perp W$ angepaßten Basis nimmt f die Blockdiagonalform

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & f|_W \end{pmatrix}$$

an, so daß

$$P_f(X) = P_{f|_W}(X) \cdot (X - \lambda).$$

Es folgt nun aus der Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Faktoren im Polynomring $K[X]$, siehe Skript zur Vorlesung *Grundlagen der Algebra*, daß auch $f|_W$ ein in Linearfaktoren zerfallendes charakteristisches Polynom besitzt. Daher können wir für W und $f|_W$ per Induktion auf Eigenschaft (b) schließen.

Konkret: wir setzen für $\mu \in K$ für den Eigenraum von $f|_W$ zum Eigenwert μ
$$W_\mu(f) := V_\mu(f|_W) = \{w \in W \ ; \ f(w) = \mu w\} = W \cap V_\mu(f). \tag{4.3}$$
Nach Induktionsvoraussetzung sind für die Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_s$ von $f|_W$
$$W = W_{\mu_1}(f) \perp \ldots W_{\mu_s}(f)$$
orthogonale Summe der Eigenräume von $f|_W$. Für $\lambda \neq \mu$ ist nach Proposition 4.17 und Proposition 4.18
$$V_\mu(f) \subseteq V_\lambda(f)^\perp \subseteq \langle v \rangle^\perp = W$$
und damit $V_\mu(f) = W_\mu(f)$. Für $\lambda = \mu$ gilt
$$V_\lambda(f) = \langle v \rangle \perp W_\lambda(f),$$
wobei eventuell $W_\lambda(f) = (0)$ ist. Das soll uns nicht stören. Wir verlangen sogar, daß $\mu_1 = \lambda$ und akzeptieren, daß in der Zerlegung (4.3) eventuell als erster Summand der Nullraum steht. Wegen
$$P_f(X) = (X - \lambda) P_{f|_W}(X)$$
sind die Eigenwerte von f gerade $\lambda = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$. Dann gilt:
$$\begin{aligned} V &= \langle v \rangle \perp W \\ &= \langle v \rangle \perp (W_{\mu_1}(f) \perp \ldots W_{\mu_s}(f)) \\ &= (\langle v \rangle \perp W_\lambda(f)) \perp (W_{\mu_2}(f) \perp \ldots W_{\mu_s}(f)) \\ &= V_\lambda(f) \perp (W_{\mu_2}(f) \perp \ldots W_{\mu_s}(f)) \\ &= V_\lambda(f) \perp V_{\mu_2}(f) \perp \ldots V_{\mu_s}(f). \end{aligned}$$
Das war zu zeigen. □

Bemerkung 4.21. Drehungen sind normal, aber nicht selbstadjungiert. Auf die Voraussetzung zerfallender charakteristischer Polynome in Theorem 4.20 (c) bzw. (d) kann nicht verzichtet werden.

Übungsaufgaben zu §4

Übungsaufgabe 4.1. Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen Bilinearform. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus und $P(X) \in K[X]$ ein Polynom. Zeigen Sie, daß
$$P(f)^* = P(f^*).$$

Übungsaufgabe 4.2. Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen Bilinearform. Sei $f : V \to V$ ein normaler Endomorphismus und $P(X) \in K[X]$ ein Polynom. Zeigen Sie, daßauch $P(f) : V \to V$ ein normaler Endomorphismus ist.

Übungsaufgabe 4.3. Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einer anisotropen symmetrischen Bilinearform. Zu einem Endomorphismus $f : V \to V$ definieren wir die Bilinearform $(\ ,\ )_f : V \times V \to K$ durch
$$(v, w)_f = (f(v), w)$$
für alle $v, w \in V$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) $(\ ,\ )_f$ ist Bilinearform.
(2) $(\ ,\ )_f$ ist symmetrisch genau dann, wenn f selbstadjungiert ist.
(3) Eine bezüglich $(\ ,\ )$ orthogonale Basis aus Eigenvektoren von f ist dasselbe wie eine Basis die bezüglich $(\ ,\ )$ und $(\ ,\ )_f$ orthogonal ist.

Teil 2. Euklidische Vektorräume

In diesem Kapitel arbeiten wir mit Vektorräumen über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

5. Skalarprodukte

5.1. **Definitheit symmetrischer Bilinearformen.** Die zentrale Definition diese Kapitels ist die folgende.

Definition 5.1. Eine symmetrische Bilinearform $(\ , \ )$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißt

(1) **positiv definit**, wenn für alle $v \in V$, $v \neq 0$ gilt $(v, v) > 0$,
(2) **positiv semi-definit**, wenn für alle $v \in V$, $v \neq 0$ gilt $(v, v) \geq 0$,
(3) **negativ definit**, wenn für alle $v \in V$, $v \neq 0$ gilt $(v, v) < 0$,
(4) **negativ semi-definit**, wenn für alle $v \in V$, $v \neq 0$ gilt $(v, v) \leq 0$,
(5) **indefinit**, wenn keine der Fälle (1)-(4) eintritt.

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ heißt positiv/negativ (semi-)definit oder indefinite, wenn die zugehörige Bilinearform $(\ , \ )_A$ auf $\mathbb{R}^n$ entsprechend positiv/negativ (semi-)definit oder indefinit ist.

Wir nennen $(\ , \ )$ ein **Skalarprodukt**, wenn $(\ , \ )$ symmetrisch und positiv definit ist.

Bemerkung 5.2. Eine positiv (bzw. negativ) definite symmetrische Bilinearform ist anisotrop.

Beispiel 5.3. (1) Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist positiv definit. Für $v = (x_1, \ldots, x_n)^t$ verschieden von 0 gilt

$$\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0.$$

(2) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2014 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit. Das liegt im Wesentlichen daran, daß die Diagonalterme dominieren und positiv sind. Genauer: für $v = (x, y)^t$ gilt

$$(v, v)_A = v^t A v = 3x^2 - 2xy + 2014y^2 = 2x^2 + (x - y)^2 + 2013y^2$$

und dies ist als Summe von Quadraten positiv, außer wenn $x = y = 0$.

(3) Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist weder noch: $(e_1, e_1)_B = 1$ während $(e_2, e_2)_B = -1$.

Lemma 5.4. *Sei $(V, (\ , \ ))$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform, und sei A die Gram'sche Matrix bezüglich einer Basis von V. Dann ist das Vorzeichen von*

$$\det(A)$$

unabhängig von der Wahl der Basis (oder der Wert ist immer 0).

Beweis. Nach der Formel aus Proposition 1.12 für den Basiswechsel der Gram'schen Matrix gibt es für die Gram'sche Matrix B zu einer anderen Basis ein $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit

$$B = S^t A S.$$

Dann ist aber

$$\det(B) = \det(S^t A S) = \det(S^t)\det(A)\det(S) = \det(S)^2 \det(A),$$

und weil $\det(S)^2 > 0$ haben $\det(B)$ und $\det(A)$ das gleiche Vorzeichen (oder beide sind 0 im nicht perfekten Fall). $\square$

Lemma 5.5. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform, und sei A die Gram'sche Matrix bezüglich einer Basis von V.*

(1) *Wenn $(\ ,\ )$ positiv definit ist, dann gilt*
$$\det(A) > 0.$$
(2) *Wenn $(\ ,\ )$ negativ definit ist, dann gilt*
$$\det(A) \begin{cases} > 0 & \textit{wenn } \dim(V) \textit{ gerade}, \\ < 0 & \textit{wenn } \dim(V) \textit{ ungerade}. \end{cases}$$

Beweis. Da das Vorzeichen nach Lemma 5.4 nicht von der Wahl der Basis abhängt, dürfen wir nach Theorem 3.9 eine Orthogonalbasis wählen. Die Diagonaleinträge sind von der Form (b, b) für Basisvektoren b und sind positiv (bzw. negativ), wenn $(\ ,\ )$ positiv (bzw. negativ) definit ist. Das Vorzeichen der Determinante ergibt sich sofort, weil nun $\det(A)$ nur das Produkt der Diagonaleinträge ist. $\square$

Satz 5.6 (Hauptminorenkriterium für positive/negative Definitheit)**.** *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform, und sei A die Gram'sche Matrix bezüglich einer Basis von V. Sei A_r die Matrix aus den ersten r Zeilen und Spalten von A. Dann gilt:*

(1) $(\ ,\ )$ *ist positiv definit* $\iff$ *für alle* $1 \le r \le \dim(V)$ *gilt* $\det(A_r) > 0$.
(2) $(\ ,\ )$ *ist negativ definit* $\iff$ *für alle* $1 \le r \le \dim(V)$ *gilt* $(-1)^r \det(A_r) > 0$.

Beweis. Sei A die Gram'sche Matrix zur Basis $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$. Dann ist A_r die Gram'sche Matrix für die Einschränkung von $(\ ,\ )$ auf die lineare Hülle $V_r = \langle b_1, \ldots, b_r\rangle$. Die Einschrängkung ist wieder positiv (bzw. negativ) definit. Lemma 5.5 zeigt das behauptete Vorzeichen von $\det(A_r)$.

Für die Umkehrung überlegen wir zuerst, daß die symmetrische Bilinearform $-(\ ,\ )$ positiv definit ist genau dann, wenn $(\ ,\ )$ negativ definit ist. Sei B_r die Gram'sche Matrix zu $-(\ ,\ )$ eingeschränkt auf V_r. Dann ist
$$\det(B_r) = (-1)^r \det(A_r).$$
Also folgt (b) aus (a) angewandt auf $-(\ ,\ )$. Es reicht also zu beweisen, daß $(\ ,\ )$ positiv definit ist, wenn nur alle $\det(A_r) > 0$ sind.

Sei also $\det(A_r) > 0$ für alle $1 \le r \le \dim(V)$. Wir zeigen per Induktion nach der Dimension $r = \dim V_r$, daß die Einschränkung von $(\ ,\ )$ auf V_r positiv definit ist. Für den Induktionsanfang $r = 1$ haben wir $\det(A_1) > 0$ und die ensprechende symmetrische Bilinearform ist positiv definit.

Sei also nach Induktionsannahme $(\ ,\ )$ auf V_{r-1} positiv definit. Es gibt eine Orthogonalbasis $(c_1, \ldots, c_{r-1})$ von V_{r-1}. Sei C_{r-1} die Gram'sche Matrix bezüglich $(c_1, \ldots, c_{r-1})$. Da $\det(A_{r-1}) \neq 0$ gilt nach Lemma 5.4
$$0 \neq \det(C_{r-1}) = \prod_{i=1}^{r-1} (c_i, c_i)$$
und die c_i für $1 \le i < r$ sind anisotrop: $(c_i, c_i) \neq 0$.

Wir erweitern mit dem Basisergänzungssatz zunächst zu einer Basis $(c_1, \ldots, c_{r-1}, v)$ von V_r. Damit gibt es (wie beim Verfahren aus dem Beweis von Theorem 3.9 oder auch Gram–Schmidt Verfahren genannt — wir wissen zwar nicht, daß $(\ ,\ )$ anisotrop ist, haben aber die c_i so gewählt, daß das Gram–Schmidt Verfahren keinen Ärger macht)
$$c_r = v - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{(v, c_i)}{(c_i, c_i)} c_i \in V_{r-1}^{\perp}.$$
Wir erhalten eine Orthogonalbasis $(c_1, \ldots, c_r)$ von V_r. Seien C_r die entsprechenden Gram'sche Matrix. Dann ist
$$(c_r, c_r) = \det(C_r)/\det(C_{r-1}) > 0,$$

denn das Vorzeichen ist nach Lemma 5.4 gleich dem von $\det(A_r)/\det(A_{r-1})$. Da $(\ ,\ )$ auf V_{r-1} positiv definit ist, gilt somit für alle $1 \leq i \leq r$

$$(c_i, c_i) > 0.$$

Die Matrix C_r ist also eine Diagonalmatrix mit ausschließlich positiven Diagonaleinträgen. Also ist für $v = \sum_{i=1}^r v_i c_i$ verschieden von 0

$$(v, v) = \sum_{i=1}^{r} v_i^2 (c_i, c_i) > 0.$$

Dies war zu zeigen. □

Beispiel 5.7. Die Hauptminoren in Beispiel 5.3 (2) sind $\det(A_1) = 3$ und $\det(A_2) = 6041$. Also ist die Bilinearform $(\ ,\ )_A$ positiv definit.

5.2. **Signatur.** Symmetrische Bilinearformen auf reellen endlich-dimensionalen Vektorräumen werden über die Signatur klassifiziert.

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform. Zu einer Orthogonalbasis $\mathscr{B}$ definieren wir

$$\begin{aligned} n_+(\mathscr{B}) &= |\{b \in \mathscr{B}\ ;\ (b,b) > 0\}|, \\ n_-(\mathscr{B}) &= |\{b \in \mathscr{B}\ ;\ (b,b) < 0\}|, \\ n_0(\mathscr{B}) &= |\{b \in \mathscr{B}\ ;\ (b,b) = 0\}|. \end{aligned}$$

Theorem 5.8 (Trägheitssatz von Sylvester)**.** *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform. Die $n_+(\mathscr{B})$, $n_-(\mathscr{B})$ und $n_0(\mathscr{B})$ sind von der Wahl der Orthogonalbasis $\mathscr{B}$ unabhängig, und zwar gilt mit*

$$\begin{aligned} d_+ &:= \max\{\dim_{\mathbb{R}}(W)\ ;\ W \subseteq V \text{ Unterraum und } (\ ,\ )|_{W\times W} \text{ ist positiv definit}\}, \\ d_- &:= \max\{\dim_{\mathbb{R}}(W)\ ;\ W \subseteq V \text{ Unterraum und } (\ ,\ )|_{W\times W} \text{ ist negativ definit}\}, \\ d_0 &:= \dim_{\mathbb{R}} V^{\perp}, \end{aligned}$$

genauer $n_+(\mathscr{B}) = d_+$, $n_-(\mathscr{B}) = d_-$ und $n_0(\mathscr{B}) = d_0$ und $\dim_{\mathbb{R}}(V) = d_+ + d_- + d_0$.

Beweis. Sei $\mathscr{B}$ eine Orthogonalbasis von V bezüglich $(\ ,\ )$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_+ &= \{b \in \mathscr{B}\ ;\ (b,b) > 0\}, \\ \mathscr{B}_- &= \{b \in \mathscr{B}\ ;\ (b,b) < 0\}, \\ \mathscr{B}_0 &= \{b \in \mathscr{B}\ ;\ (b,b) = 0\}, \end{aligned}$$

und für $* \in \{+, -, 0\}$ definieren wir W_* als die lineare Hülle von $\mathscr{B}_*$. Dann ist $(\ ,\ )$ eingeschränkt auf W_+ (bzw. W_-) positiv (bzw. negativ) definit nach dem Hauptminorenkriterium Satz 5.6 und damit

$$n_\pm(\mathscr{B}) = \dim_{\mathbb{R}}(W_\pm) \leq d_\pm. \tag{5.1}$$

Außerdem ist $W_0 \subseteq V^\perp$ und so

$$n_0(\mathscr{B}) \leq d_0. \tag{5.2}$$

Insgesamt gilt

$$\dim(V) = n_+(\mathscr{B}) + n_-(\mathscr{B}) + n_0(\mathscr{B}) \leq d_+ + d_- + d_0.$$

Sei U_+ (bzw. U_-) ein Unterraum maximaler Dimension d_+ (bzw. d_-) auf dem $(\ ,\ )$ positiv (bzw. negativ) definit ist. Dann ist $(\ ,\ )$ auf $U_{\leq 0} = U_- + V^\perp$ (bzw. $U_{\geq 0} = U_+ + V^\perp$) positiv (bzw. negativ) semi-definit. Sei beispielsweise $v = u + w$ mit $u \in U_+$ und $w \in V^\perp$, dann gilt

$$(v, v) = (u + w, u + w) = (u, u) \geq 0.$$

Für $v \in U_{\leq 0}$ argumentiert man analog.

Somit gilt

$$V^{\perp} \cap U_+ \subseteq U_{\leq 0} \cap U_+ = (0)$$
$$V^{\perp} \cap U_- \subseteq U_{\geq 0} \cap U_- = (0),$$

da $(\ , \ )$ auf dem Schnitt sowohl positiv definit als auch negativ semi-definit (bzw. negativ definit und positiv semi-definit) sein muß. Das geht nur auf dem Null-Vektorraum. Dann können wir nach unten abschätzen

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}}(V) &\geq \dim_{\mathbb{R}}(U_{\leq 0} + U_+) \\ &= \dim_{\mathbb{R}}(U_{\leq 0}) + \dim_{\mathbb{R}}(U_+) - \dim(U_{\leq 0} \cap U_+) = \dim_{\mathbb{R}}(U_- + V^{\perp}) + \dim_{\mathbb{R}}(U_+) \\ &= \dim_{\mathbb{R}}(U_-) + \dim(V^{\perp}) - \dim_{\mathbb{R}}(U_- \cap V^{\perp}) + \dim_{\mathbb{R}}(U_+) \\ &= \dim_{\mathbb{R}}(U_-) + \dim(V^{\perp}) + \dim_{\mathbb{R}}(U_+) = d_- + d_0 + d_+.\end{aligned}$$

Dies ist nur möglich, wenn die Ungleichungen in (5.1) und (5.2) in Wirklichkeit Gleichungen sind.

Die Werte $n_+(\mathscr{B})$, $n_-(\mathscr{B})$ und $n_0(\mathscr{B})$ sind von der Wahl der Orthogonalbasis $\mathscr{B}$ unabhängig, weil die Werte d_+, d_- und d_0 ohne Bezug auf $\mathscr{B}$ allein aus $(V, (\ , \ ))$ heraus definiert sind. □

Definition 5.9. Die **Signatur** einer symmetrischen Bilinearform $(\ , \ )$ auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist das Tupel

$$(d_+, d_-, d_0)$$

aus Theorem 5.8. Im nichtausgearteten Fall, also wenn $d_0 = 0$, wird auch das verkürzte Tupel

$$(d_+, d_-)$$

Signatur genannt. In diesem Fall heißt $\tau(V) = d_+ - d_-$ der **Index** von $(\ , \ )$.

Bemerkung 5.10. Sei $(V, (\ , \ ))$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform $(\ , \ )$ von Signatur (d_+, d_-, d_0). Dann hat die Gram'schen Matrix A (bezüglich irgendeiner Basis) den Rang $\mathrm{rg}(A) = d_+ + d_-$.

Beispiel 5.11. Die Spezielle Relativitätstheorie beschreibt die Raumzeit als einen $\mathbb{R}^4$ mit 3 Raumkoordinaten und einer Zeitkordinate. Abstände werden mit der 'Minkowski-Metrik' bestimmt. Dies ist eine perfekte symmetrische Bilinearform η der Signatur $(3, 1)$, welche in der Basis $\mathscr{B}$ bestehend aus zuerst drei rechtwinkligen Raumrichtungen und dann einer Zeitrichtung durch die Matrix

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit. Sei t der globale Zeitparameter[4] und sei zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Photon im Ort (x_0, y_0, z_0, t_0), das sich im Raum in Richtung

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

bewegt. Wir verlangen

$$c = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

damit sich das Photon mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, wenn es sich auf der Bahn

$$\varphi(t) = (xt + x_0, yt + y_0, zt + z_0, t + t_0)$$

[4]Die spezielle Relativitätstheorie kennt eine globale Zeitkoordinate. In der allgemeinen Relativitätstheorie gibt es keine global für alle geltende Zeit, sondern nur noch die vom Beobachter in seinem Koordinatensystem ermittelte (Eigen-)Zeit.

bewegt. Die Differenz zweier Raumzeitpositionen des Photons ist dann isotrop. Der Einfachheit halber nehmen wir $t_2 = t$ und $t_1 = 0$:

$$\begin{aligned}\eta(\varphi(t)-\varphi(0),\varphi(t)-\varphi(0)) &= (xt,yt,zt,t)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-c\end{pmatrix}(xt,yt,zt,t)^t\\ &= t^2(x^2+y^2+z^2-c^2)=0.\end{aligned}$$

Die Menge der Punkte, die von einem Punkt im $\mathbb{R}^4$ in einer isotropen Richtung liegen, bilden den Lichtkegel. Auf diesen sind die Bahnen der Photonen beschränkt.

Definition 5.12. Sei K ein Körper mit $2 \in K^\times$.

(1) Ein **quadratischer Raum** (über K) ist ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum zusammen mit einer symmetrischen Bilinearform $(\ ,\ ) : V \times V \to K$. Wir bezeichnen das Paar $(V, (\ ,\ ))$ auch oft der Einfachheit halber nur mit V.

(2) Eine **isometrische Abbildung** ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen quadratischen Räumen $(V, (\ ,\ ))$ und $(W, (\ ,\ ))$, so daß für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$(f(v_1), f(v_2)) = (v_1, v_2).$$

(3) Zwei quadratische Räume V, W heißen **isometrisch**, wenn es wechselseitige inverse isometrische Abbildungen $f : V \to W$ und $f^{-1} : W \to V$ gibt.

Bemerkung 5.13. Eine invertierbare isometrische Abbildung ist dasselbe wie eine isometrische Abbildung mit einer dazu inversen isometrischen Abbildung. Die inverse lineare Abbildung ist automatisch isometrisch.

Satz 5.14. *Zwei quadratische Räume über $\mathbb{R}$ sind isometrisch genau dann, wenn sie die gleiche Signatur haben.*

Beweis. Seien $(V, (\ ,\ ))$ und $(W, (\ ,\ ))$ quadratische Räume. Wir nehmen zunächst an, daß V und W isometrisch sind. Sei $f : V \to W$ eine invertierbare isometrische Abbidlung, und sei $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthogonalbasis von V. Dann ist $\mathscr{C} = f(\mathscr{B}) = (f(b_1), \ldots, f(b_n))$ eine Basis von W, denn f ist Vektorraumisomorphismus, und auch orthogonal, weil f isometrisch ist. Wegen $(f(b_i), f(b_i)) = (b_i, b_i)$ gilt für $* \in \{+, 0, -\}$

$$n_*(\mathscr{B}) = n_*(\mathscr{C})$$

und damit haben V und W die gleiche Signatur.

Haben nun V und W beide die Signatur (r, s, t). Sei $\mathscr{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ nach Theorem 5.8 eine Orthogonalbasis von V, so daß

$$(b'_i, b'_i) = \lambda_i \begin{cases} > 0 & \text{for } 1 \le i \le r,\\ < 0 & \text{for } r+1 \le i \le r+s,\\ = 0 & \text{for } r+s+1 \le i \le r+s+t = n.\end{cases}$$

Wir skalieren nun für $1 \le i \le r+s$

$$b_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} b'_i$$

und $b_i = b'_i$ für $i > r+s$. Bezüglich der neuen Basis $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ hat $(\ ,\ )$ die Gram'sche Matrix A in Blockform der Größe r, s, t (mit E der Einheitsmatrix der entsprechenden Größe)

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0\\ 0 & -E & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Sei $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ eine entsprechende Basis von W. Dann wird durch

$$f(b_i) := c_i$$

eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : V \to W$ festgelegt. Diese ist invertierbar (Basis geht auf Basis) und isometrisch, denn für alle Vektoren $v = \sum_i v_i b_i$ und $w = \sum_i w_i b_i$ gilt:

$$\begin{aligned}(v,w) = \sum_{i,j} v_i w_i (b_i, b_j) &= \sum_{i,j} v_i w_j (e_i, e_j)_A \\ &= \sum_{i,j} v_i w_j (c_i, c_j) = \sum_{i,j} v_i w_j (f(b_i), f(b_j)) = (f(v), f(w)).\end{aligned}$$

□

Definition 5.15. Ein **euklidischer Vektorraum** ist ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ Vektorraum V zusammen mit einer positiv definiten, symmetrischen Bilinearform $(\ ,\ )$. Wir bezeichnen das Paar $(V, (\ ,\ ))$ auch oft der Einfachheit halber nur mit V.

Korollar 5.16. *Alle euklidischen Vektorräume der gleichen Dimension sind isometrisch.*

Beweis. Dies ist der Fall der Signatur $(n, 0, 0)$ von Satz 5.14. □

Bemerkung 5.17. Wenn zukünftig von einem euklidischen Vektorraum V die Rede sein wird, dann ist es legitim, sich darunter den $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt vorzustellen, wobei $n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$, denn V ist isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ und Isometrien erhalten alles was durch die lineare Struktur und das Skalarprodukt ausgedrückt werden kann.

Bemerkung 5.18. Die Menge der Skalarprodukte auf einem gegebenen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden keinen Untervektorraum der (symmetrischen) Bilinearformen. Zum Beispiel ist das Negative eines Skalarprodukts negativ definit und nicht positiv definit. Aber mit positiv definiten symmetrischen Bilinearformen f_1, f_2 und $\lambda, \mu \geq 0$ und nicht beide 0, ist auch

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2$$

positiv definit. Eine Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraums, die abgeschlossen ist unter solchen Positivlinearkombinationen, nennt man einen Kegel.

5.3. **Gram-Schmidt II.** Ein Vektorraum hat lineare Struktur und man betrachtet Basen, um zu Koordinaten zu kommen. Alle Basen sind gleich gut.

Ein euklidischer Raum hat lineare Struktur und dazu das Skalarprodukt. Die dem Skalarprodukt angepaßten Basen sind die Orthonormalbasen. Alle Orthonormalbasen sind gleich gut.

Definition 5.19. Die **Norm** eines Vektors v in einem euklidischen Vektorraum $(V, (\ ,\ ))$ ist definiert als die reelle Zahl

$$\|v\| = \sqrt{(v,v)}.$$

Der **normierter** Vektor ist ein Vektor $v \in V$, so daß $\|v\| = 1$.

Lemma 5.20. *Sei V euklidischer Vektorraum, $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

Beweis. Wir ziehen die (nicht-negative) Wurzel aus $\|\lambda v\|^2 = (\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 (v,v) = \lambda^2 \|v\|^2$. □

Beispiel 5.21. Jeder von 0 verschiedene Vektor v eines euklidischen Vektorraums hat zwei Vielfache, die ein normierter Vektor sind. Die Gleichung $\|\lambda v\| = 1$ ist äquivalent zu $|\lambda| \cdot \|v\| = 1$. Gesucht sind die normierten Vektoren

$$\pm \|v\|^{-1} \cdot v.$$

Dieser Trick kam schon im Beweis von Satz 5.14 vor.

Definition 5.22. Ein **Orthonormalsystem** in einem euklidischen Vektorraum $(V, (\ ,\ ))$, ist ein Tupel von Vektoren $(v_1, \ldots, v_r)$, die

(i) orthogonal sind: $(v_i, v_j) = 0$ für alle $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq r$, und
(ii) normiert sind: $\|v_i\| = 1$ für alle $1 \leq i \leq r$.

Lemma 5.23. *Die Vektoren eines Orthonormalsystems $(v_1, \ldots, v_r)$ sind linear unabhängig.*

Beweis. Wenn $\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = 0$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lambda_j = (v_j, \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i) = 0.$$

Die Linearkombination ist also trivial. Damit ist das Orthonormalsytem linear unabhängig. □

Definition 5.24. Eine **Orthonormalbasis** eines euklidischen Vektorraums $(V, (\ ,\ ))$, ist eine Basis $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, die ein Orthonormalsystem ist. Wir sagen kurz $\mathscr{B}$ ist eine ONB.

Bemerkung 5.25. (1) Eine ONB definiert ein **rechtwinkliges Koordinatensystem**.

(2) Es ist konsequent, bei euklidischen Vektorräumen bevorzugt ONB zu betrachten. Diese sind an die geometrische Struktur des Skalarprodukts angepaßt und werden so der vorhandenen Struktur gerecht. ONB sind für euklidische Vektorräume, was Basen für Vektorräume sind.

(3) Eine Basis $\mathscr{B}$ ist eine ONB genau dann, wenn die duale Basis $\mathscr{B}^*$ im Sinn von Lemma-Definition 4.1 wieder $\mathscr{B}$ ist.

(4) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines euklidischen Vektorraums. Die Formel aus Satz 4.8 (3) für die Matrix der adjungierten Abbildung f^* wird für eine ONB zu

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f^*) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)^t.$$

Es ist f selbstadjungiert genau dann, wenn die Matrix bezüglich einer (äquivalent aller) ONB eine symmetrische Matrix ist.

Lemma 5.26. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und $\mathscr{B}$ eine Basis von V. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) *$\mathscr{B}$ ist ONB.*

(b) *Die Gram'sche Matrix von $(\ ,\ )$ bezüglich $\mathscr{B}$ ist die Einheitsmatrix.*

(c) *$\mathscr{B}$ ist seine eigene Dualbasis bezüglich $(\ ,\ )$.*

Beweis. Das ist klar. □

Satz 5.27 (Gram–Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren)**.** *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum, und sei $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von V. Wir konstruieren für $i = 0, \ldots, n$ eine Basis $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ durch*

$$b_1 = \frac{1}{\|c_1\|} c_1$$

und für $i \geq 2$ durch $b_i = \frac{1}{\|b_i'\|} b_i'$ mit

$$b_i' = c_i - \sum_{j=1}^{i-1} (c_i, b_j) b_j.$$

Die Basis $\mathscr{B}$ ist eine Orthonormalbasis von V bezüglich $(\ ,\ )$.

Beweis. Dies ist nichts anderes als das Orthogonalisierungsverfahren aus Satz 3.23 mit einem zusätzlichen Normierungsschritt, der b_i' durch ein normiertes Vielfaches. Dadurch verschwindet der Nenner in der Definition der b_i' im Vergleich zu Satz 3.23.

Die Normierung, also die Division durch $\|b_i'\|$, ist möglich, denn aus dem Beweis von Satz 3.23 folgt, daß b_i' Teil einer Basis ist, also $b_i' \neq 0$ und daher $\|b_i'\| \neq 0$.

Wie in Satz 3.23 nachgewiesen, ist $\mathscr{B}$ eine Orthogonalbasis. Da aber alle b_i normiert wurden, handelt es sich um eine ONB. □

Das Gram–Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren zeigt in Wirklichkeit mehr.

Satz 5.28. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum.*

(1) *Es gibt Orthonormalbasen für V.*

(2) Jedes Orthonormalsystem in V läßt sich zu einer ONB ergänzen.

Beweis. (1) Der Vektorraum V hat eine Basis. Der Algorithmus aus Satz 5.27 transformiert diese in eine ONB, die es damit auch gibt.

(2) Sei $(c_1, \ldots, c_r)$ eine Orthonormalsystem. Dann sind diese Vektoren nach Lemma 5.23 linear unabhängig und können deshalb zu einer Basis $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ ergänzt werden. Nun wenden wir auf $\mathscr{C}$ den Algorithmus aus Satz 5.27 an. Da $(c_1, \ldots, c_r)$ bereits orthonormal sind, wird dabei (per Induktion zu zeigen) $b_i = c_i$ für $1 \leq i \leq r$, d.h. es passiert zunächst nichts. Der Algorithmus spuckt also eine ONB aus, die das gegebene Orthonormalsystem fortsetzt. □

Korollar 5.29. *Sei $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix. Dann sind äquivalent:*

(a) P ist symmetrisch und positiv definit (bzw. semi-definit).
(b) Es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (bzw. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) mit

$$P = A^t A.$$

Beweis. Die Matrix $P = A^t A$ ist wegen

$$P^t = (A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A = P$$

offensichtlich symmetrisch. Weiter ist für alle $v \in \mathbb{R}^n$

$$(v, v)_P = v^t A^t A v = (Av)^t (Av) = \langle Av, Av \rangle \geq 0.$$

Wenn A sogar invertierbar ist, dann folgt für $v \neq 0$ sogar $(v, v)_P > 0$.

Sei umgekehrt P positiv definit. Die symmetrische Bilinearform $(\ , \ )_P$ besitzt nach Satz 5.28 eine ONB $\mathscr{B}$. Sei $A = \mathrm{M}^{\mathscr{E}}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Basiswechselmatrix von der Standardbasis $\mathscr{E}$ zu $\mathscr{B}$. Dann ist

$$P = \mathrm{M}^{\mathscr{E},\mathscr{E}}((\ , \ )_P) = A^t\, \mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}((\ , \ )_P) A = A^t E A = A^t A.$$

Ist P nur positiv semi-definit, dann wählen wir eine Orthogonalbasis $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ mit $(b_i, b_i) = 1$ für $1 \leq i \leq r$ und $(b_i, b_i) = 0$ für $r+1 \leq i \leq n$. Es folgt, mit der Matrix in Blockform der Größe $(r, n-r)$

$$E_{r,n-r} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E^t_{r,n-r} E_{r,n-r}$$

wie im positiv definiten Fall nur

$$P = A^t E_{r,n-r} A = A^t E^t_{r,n-r} E_{r,n-r} A = B^t B$$

mit $B = E_{r,n-r} A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. □

Bemerkung 5.30. Die Matrix A in Korollar 5.29 kann als obere Dreiecksmatrix gewählt werden. Dazu wählt man die im Beweis die ONB $\mathscr{B}$ nach dem Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren angewandt auf die Standardbasis. Der Basiswechsel hat dann als Basiswechselmatrix $R = A$ eine obere Dreiecksmatrix, vgl. Bemerkung 3.24. Die Zerlegung

$$P = R^t R$$

heißt **Cholesky-Zerlegung** und ist eindeutig, wenn man noch fordert, daß die Diagonaleinträge positiv sind. Oft wird die Zerlegung geschrieben als $P = LL^t$ mit L einer unteren Dreiecksmatrix. Das ist mit $L = R^t$ offensichtlich äquivalent.

Übungsaufgaben zu §5

Übungsaufgabe 5.1. Sei $(V, (\ , \ ))$ ein euklidischer Raum und $\mathscr{B}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, daß $\mathscr{B}$ genau dann eine ONB ist, wenn die duale Basis im Sinn von Lemma-Definition 4.1 wieder $\mathscr{B}$ ist.

Übungsaufgabe 5.2. Sei U ein Unterraum eines euklidischen Raums V. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $p : V \to V$, so daß $p(V) = U$ und für alle $u \in U$ gilt $p(u) = u$ und für alle $v \in V$ gilt $v - p(v) \in U^\perp$.
(2) Sei $r = \dim(U)$ und $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine ONB von V, die so gewählt ist, daß U die lineare Hülle von $b_1, \ldots, b_r$ ist. Dann hat für alle $v \in V$ die Abbildung aus (1) die Form
$$p(v) = \sum_{i=1}^{r} (v, b_i) b_i.$$
(3) (Bessel'sche Ungleichung) Für alle $v \in V$ gilt
$$\|p(v)\| \le \|v\|.$$
(4) Für alle $v \in V$ minimiert $p(v) \in U$ den Abstand zu v, d.h.
$$\|v - p(v)\| = \inf_{u \in U} \|v - u\|.$$

Anmerkung: die Abbildung aus (1) nennt man die **orthogonale Projektion** auf U.

Übungsaufgabe 5.3. Sei $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine ONB des euklidischen Vektorraums V. Zeigen Sei für $v = \sum_{i=1}^n v_i b_i$, daß
$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2.$$

Übungsaufgabe 5.4. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform $(\ , \ )$ der Signatur (r, s). Ein Unterraum $W \subseteq V$ heißt **isotrop** (bezüglich $(\ , \ )$), wenn für alle $w_1, w_2 \in W$ gilt
$$(w_1, w_2) = 0.$$
Zeigen Sie, daß
$$\max\{\dim(W) \ ; \ W \text{ isotroper Unterraum von } (V, (\ , \ ))\} = \min\{r, s\}.$$

6. Bewegungen und Isometrien

6.1. **Geometrie in euklidischen Vektorräumen.** Euklidische Geometrie ist eine axiomatisch definierte Geometrie, modern fundiert über die Hilbertschen Axiome der euklidischen Geometrie. Dabei modelliert euklidische Geometrie im 2- oder 3-dimensionalen Raum den von uns beobachteten wirklichen Raum, zumindest wie er sich klassisch ohne relativistische Korrekturen darstellt, in den Konzepten

Raum:	Punkt, Gerade, Ebene.
Metrisch:	Abstand, Winkel.
Dynamisch:	Bewegungen, relative Lage, Kongruenz.

Hier stoßen wir an philosophische Grenzen: was ist der 'wirkliche Raum'?. Diese Grenzen können wir aber getrost für die Belange der Vorlesung ignorieren, wenn wir uns auf den Standpunkt stellen, nur das Modell selbst verstehen zu wollen.

Die geometrischen Begriffe werden im folgenden abstrakt eingeführt. Ein Plausibilitätsvergleich mit der Wirklichkeit kann nur in dem Maße erfolgen, wie wir uns über die zu modellierenden Eigenschaften Rechenschaft ablegen.

Definition 6.1. Sei $(V, (\ , \ ))$ ein euklidischer Vektorraum.
(1) Die **Länge** eines Vektors $v \in V$ ist definiert als die nicht negative reelle Zahl
$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}.$$
(2) Der **Abstand** zweier Vektoren $v, w \in V$ ist die Länge der Differenz
$$d(v, w) = \|v - w\|.$$

Bemerkung 6.2. (1) Für $v \in V$ gilt $\|v\| \ge 0$ mit $\|v\| = 0$ dann und nur dann, wenn $v = 0$.

(2) Die Länge skaliert sich für $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ wie folgt: $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$, siehe Lemma 5.20.
(3) Für alle $v, w \in V$ gilt $d(v,w) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $v = w$. Außerdem ist $d(v,w) = d(w,v)$, denn

$$\|v - w\| = |-1|\|w - v\| = \|w - v\|.$$

Satz 6.3 (Cauchy–Schwarz Ungleichung)**.** *Sei V ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt für alle $v, w \in V$*

$$|(v,w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn v, w linear abhängig sind.

Beweis. Wenn v und w linear abhängig sind, also OBdA $w = \lambda v$ mit $\lambda \in K$, dann gilt

$$|(v, \lambda v)| = |\lambda| \cdot \|v\|^2 = \|v\| \cdot \|\lambda v\|.$$

Sei also v, w linear unabhängig. Eingeschränkt auf den 2-dimensionalen Unterraum der linearen Hülle von v, w ist $(\ ,\ )$ positiv definit, hat also bezüglich der Basis v, w eine Gram'sche Matrix mit positiver Determinante:

$$0 < \det \begin{pmatrix} (v,v) & (v,w) \\ (w,v) & (w,w) \end{pmatrix} = \|v\|^2\|w\|^2 - (v,w)^2.$$

Dies zeigt sofort die Cauchy–Schwarz Ungleichung durch Umstellen und Wurzelziehen. □

Satz 6.4. *Sei V ein euklidischer Vektroraum.*

(1) Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

(2) Es gilt die Dreiecksungleichung: für alle $u, v, w \in V$ gilt

$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w).$$

Beweis. (1) Da beide Seiten nicht-negativ sind, dürfen wir die Ungleichung quadrieren. Wir haben zu zeigen:

$$(x + y, x + y) = (x,x) + 2\|x\|\|y\| + (y,y).$$

Dies ist äquivalent zu

$$2(x,y) \leq 2\|x\|\|y\|,$$

was aus der Cauchy–Schwarz Ungleichung folgt.

Aussage (2) folgt aus Aussage (1) für $x = u - v$ und $y = v - w$. □

Definition 6.5. Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum. Der **(ungerichtete) Winkel** zwischen zwei Vektoren $v, w \in V$ mit $v \neq 0$, $w \neq 0$ ist $\measuredangle(v,w) \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\measuredangle(v,w)) := \frac{(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Bemerkung 6.6. (1) Der Winkel ist wohldefiniert, denn $(v,w)/\|v\| \cdot \|w\|$ liegt nach der Cauchy–Schwarz Ungleichung im Intervall $[-1, 1]$ und die Kosinusfunktion ist bijektiv als Funktion

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1].$$

(2) In einem euklidischen Vektorraum gilt für Vektoren $v, w \in V$:

$$v \perp w \iff \measuredangle(v,w) = \pi/2.$$

Satz 6.7 (Satz des Pythagoras, Kosinussatz)**.** *Sei V ein euklidischer Vektorraum, und seine $v, w \in V$ von 0 verschieden.*

(1) Satz des Pythagoras: Es gilt $v \perp w$ genau dann, wenn

$$d(v,w)^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

(2) Kosinussatz: Es gilt

$$d(v,w)^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\| \cos \measuredangle(v,w).$$

Beweis. Aussage (1) folgt sofort aus der präziseren Formel (2), weil für $\varphi \in [0,\pi]$ der Wert $\varphi = \pi/2$ die einzige Nullstelle der Funktion $\cos(\varphi)$ ist.

(2) Wir rechnen

$$\begin{aligned} d(v,w)^2 &= (v-w, v-w) \\ &= (v,v) + (w,w) - 2(v,w) \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\| \cos \measuredangle(v,w). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.8. (1) In der euklidischen Geometrie sollen Vektoren $v \neq 0$ und $w \neq 0$ orthogonal sein, wenn die folgenden Winkel gleich sind:

$$\measuredangle(v,w) = \measuredangle(v,-w).$$

Mit unserer Definition des Winkels ist dies äquivalent zu

$$\frac{(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{(v,-w)}{\|v\| \cdot \|-w\|},$$

was wiederum zu $(v,w) = 0$ äquivalent ist. Unsere Definition von Winkel und orthogonal sind insoweit mit den geometrischen Modellforderungen konsistent.

(2) Der Kosinus des Winkels wird elementargeometrisch als Quotient von Ankathete durch Hypothenuse am Winkel φ in einem rechtwinkligen Dreieck definiert. Seien $v \neq 0$ und $w \neq 0$ Vektoren eines euklidischen Raumes. Wir suchen auf der Geraden L_w durch 0 und w den Punkt λw, so daß die Gerade durch v und λw orthogonal zu L_w ist. Dies führt zu

$$v - \lambda w \perp w \iff (v - \lambda w, w) = 0 \iff \lambda = \frac{(v,w)}{(w,w)}.$$

Hier tritt nun eine Schwierigkeit auf. Nur für $\lambda \geq 0$ liegt λw auf der gleichen Seite der Geraden L_w wie w (von 0 aus betrachtet). Dann gilt: Das Dreieck $0, v, \lambda w$ hat bei λw einen rechten Winkel, so daß elementargeometrisch

$$\cos(\measuredangle(v,w)) = \cos(\measuredangle(v,\lambda w)) = \frac{\|\lambda w\|}{\|v\|} = \frac{|\lambda|\|w\|}{\|v\|} = \frac{\lambda\|w\|}{\|v\|} = \frac{(v,w)}{\|v\|\|w\|}.$$

Auch hier stimmt die abstrakte Definition mit der elementargeometrischen Definition, die modelliert werden soll, überein.

Falls $\lambda < 0$ liegt λw auf der anderen Seite von $0 \in L_w$ wie w. Dann ist

$$\cos(\measuredangle(v,w)) = -\cos(\measuredangle(v,\lambda w)) = -\frac{\|\lambda w\|}{\|v\|} = \frac{-|\lambda|\|w\|}{\|v\|} = \frac{\lambda\|w\|}{\|v\|} = \frac{(v,w)}{\|v\|\|w\|}.$$

Man erkennt einen Vorteil der Definition des (Kosinus des) Winkels über das Skalarprodukt: die Fallunterscheidung entfällt!

(3) Sei V ein euklidischer Vektorraum und $v, w \in V$. Wir wählen einen zweidimensionalen Unterraum $U \subseteq V$ mit $v, w \in U$. Eine Wahl haben wir nur, wenn v, w linear abhängig sind, ansonsten ist $U = \langle v, w \rangle$ die lineare Hülle. Der Vektorraum U wird mit der Einschränlung des Skalarprodukts von V selbst ein euklidischer Vektorraum. Nach Korollar 5.16 gibt es eine isometrische lineare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^2$ zum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt, die ein Isomorphismus ist. Da Abstand, Länge und Winkel nur vom Skalarprodukt abhängen und dies von f definitionsgemäß erhalten bleibt, können wir Abstand, Länge und Winkel von v und w via $f(v)$ und $f(w)$ im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt berechnen. Insbesondere reicht es aus, die Begriffe Abstand, Länge und Winkel im $\mathbb{R}^2$ als Modelle der 'wirklichen' ebenen euklidischen Geometrie zu erkennen.

6.2. **Das Volumen eines Parallelotops.** Für Parallelotope der maximalen Dimension, d.h. für den Fall nicht degenerierter Parallelotope $P(v_1, \ldots, v_r) \subseteq V$ mit $r = \dim(V)$ wollen wir einen Volumenbegriff bereitstellen.

Definition 6.9. Die **Gram-Determinante** eines Tupels $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren eines euklidischen Vektorraums V der Dimension n ist definiert als

$$G(v_1, \ldots, v_n) = \det \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & \ldots & (v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_n, v_1) & \ldots & (v_n, v_n) \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Bemerkung 6.10. Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig, so sind die Spalten der Matrix in (6.1) linear abhängig und $G(v_1, \ldots, v_n) = 0$. Andernfalls handelt es sich um die Determinante der Gram'schen Matrix der Bilinearform $(\ ,\ )$ bezüglich der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$. Diese ist nach Lemma 5.5 positiv. Damit ist das Volumen in der folgenden Definition wohldefiniert.

Definition 6.11. (1) Ein **Parallelotop** in einem euklidischen Vektorraum V ist eine Teilmenge der Form

$$P(v_1, \ldots, v_r) = \{v \in V\ ;\ v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \text{ mit } 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq r\}.$$

Das Parallelotop heißt **nicht degeneriert** falls $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig sind.

(2) Sei $n = \dim(V)$. Das **Volumen** eines Parallelotops $P(v_1, \ldots, v_n)$ ist definiert als die reelle Zahl

$$\operatorname{vol}(P(v_1, \ldots, v_n)) = \sqrt{G(v_1, \ldots, v_n)}.$$

Satz 6.12. *Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n.*

(1) Sei $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann gilt

$$\operatorname{vol}(P(f(v_1), \ldots, f(v_n))) = |\det(f)| \operatorname{vol}(P(v_1, \ldots, v_n)).$$

(2) Sei $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine ONB. Dann ist

$$\operatorname{vol}(P(b_1, \ldots, b_n)) = 1.$$

Beweis. (1) Wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig sind oder $\det(f) = 0$ gilt, dann sind auch die $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear abhängig und beide Seiten sind 0. Wir nehmen also an, daß $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $f(\mathscr{B}) = (f(b_1), \ldots, f(b_n))$ Basen sind. Sei $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{f(\mathscr{B})}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f) = A$ die Basiswechselmatrix. Die Gram'sche Matrix transformiert sich nach Proposition 1.12 wie

$$\begin{pmatrix} (f(v_1), f(v_1)) & \ldots & (f(v_1), f(v_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f(v_n), f(v_1)) & \ldots & (f(v_n), f(v_n)) \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & \ldots & (v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_n, v_1) & \ldots & (v_n, v_n) \end{pmatrix} A.$$

Weiter gilt $\det(f) = \det(A)$, und so

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(P(f(v_1), \ldots, f(v_n)))^2 &= \det \begin{pmatrix} (f(v_1), f(v_1)) & \ldots & (f(v_1), f(v_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f(v_n), f(v_1)) & \ldots & (f(v_n), f(v_n)) \end{pmatrix} \\ &= \det(A^t) \det \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & \ldots & (v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_n, v_1) & \ldots & (v_n, v_n) \end{pmatrix} \det(A) \\ &= \det(f)^2 \operatorname{vol}(P(v_1, \ldots, v_n))^2. \end{aligned}$$

Dies zeigt Aussage (1).

(2) Sei nun $\mathscr{B}$ eine ONB. Dann ist die zugehörige Gram'sche Matrix die Einheitsmatrix und das Volumen des Parallelotops gleich 1 wie behauptet. $\square$

Bemerkung 6.13. Satz 6.12 zeigt, daß diese Festsetzung des Volumens den anschaulichen Volumenbegriff modelliert. Das Parallelotop zu einer ONB ist ein Würfel der Kantenlänge 1, und demnach anschaulichem Volumen 1. Außerdem muß ein Volumenbegriff multilinear in den aufspannenden Vektoren sein, vorausgesetzt, man definiert das Volumen mit einem Vorzeichen, das die Orientierung, welche durch die Reihenfolge der aufspannenden Vektoren definiert wird, berücksichtigt.

Beispiel 6.14. Wir zeigen in diesem Beispiel, wie das Volumen eines Parallelotops in der Ebene als Volumen des zu einem Rechteck gescherten Parallelotops berechnet werden kann. Insbesondere stimmt daher hier das Volumen mit dem Flächeninhalt im herkömmlichen elementargeometrischen Sinne überein.

(1) Ein Parallelotop $P = P(v_1, v_2)$ im $\mathbb{R}^2$ ist ein Parallelogramm.

(2) Ein Parallelotop $P = P(v_1, v_2)$ im $\mathbb{R}^2$ ist ein Rechteck, wenn $v_1 \perp v_2$. Dann gilt

$$\operatorname{vol}(P) = \sqrt{G(v_1, v_2)} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & 0 \\ 0 & \|v_2\|^2 \end{pmatrix}} = \|v_1\| \cdot \|v_2\|,$$

wie dies zu erwarten war.

(3) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei die Matrixmultiplikation mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die **Scherung** (oder **Transvektion**) entlang der x-Achse, der Fixgeraden der Scherung, mit dem Scherfaktor λ. Wegen $\det(A) = 1$ ändert sich hierbei das Volumen eines Parallelotops nicht.

(4) Zu jedem Parallelotop $P = P(v_1, v_2)$ im $\mathbb{R}^2$ gibt es eine Scherung, die P in ein Rechteck transformiert. Wenn v_1, v_2 linear abhängig sind, hat man nichts zu tun. Ansonsten scheren wir mit Fixgeraden $L = \langle v_1 \rangle$ und einem noch zu bestimmenden Streckfaktor. Sei dazu

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$$

der normierte Vektor in Richtung v_1 auf L, und sei u_2 normiert und orthogonal zu v_1. Mit andern Worten u_2 ergänzt u_1 zu einer ONB $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ von $\mathbb{R}^2$. In dieser Basis ist die gesuchte Scherung f_A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit einem noch zu bestimmenden $\lambda \in \mathbb{R}$: der Vektor $v = (v, u_1)u_1 + (v, u_2)u_2$ bildet ab auf

$$f_A(v) = \big((v, u_1) + \lambda(v, u_2)\big)u_1 + (v, u_2)u_2 = v + \lambda(v, u_2)u_1.$$

Hieraus sieht man, daß die Gerade L fix gelassen wird ($f_A(v_1) = v_1$) und ansonsten Punkte v proportional zum Abstand (siehe Aufgabe 5.2 zur orthogonalen Projektion)

$$d(v, L) := \min\{d(v, w) \ ; \ w \in L\} = (v, u_2)$$

mit dem Faktor λ in Richtung u_1 bewegt. Diese Scherung macht aus dem Parallelotop $P = P(v_1, v_2)$ ein Rechteck, wenn gilt

$$0 = (f_A(v_1), f_A(v_2)) = (v_1, v_2 + \lambda(v_2, u_2)u_1) = (v_1, v_2) + \lambda(v_2, u_2)(v_1, u_1).$$

Wir setzen $\varphi = \measuredangle(v_1, v_2)$, so daß

$$v_2 = (v_2, u_1)u_1 + (v_2, u_2)u_2 = \|v_2\| \cdot (\cos(\varphi)u_1 + \sin(\varphi)u_2)$$

und bestimmen den nötigen Scherungsfaktor als

$$\lambda = -\frac{(v_1, v_2)}{(v_2, u_2)(v_1, u_1)} = -\frac{\|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos(\varphi)}{\|v_2\| \sin(\varphi) \cdot \|v_1\|} = -\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}.$$

Das Bild $f_A(v_2)$ mit diesem λ ist

$$\begin{aligned} f_A(v_2) &= v_2 + \lambda(v_2, u_2)u_1 = v_2 - \frac{(v_1, v_2)}{(v_2, u_2)(v_1, u_1)} \cdot (v_2, u_2)u_1 \\ &= v_2 - \|v_2\| \cos(\varphi) \cdot u_1 = \|v_2\| \cdot \sin(\varphi) u_2. \end{aligned}$$

Als Volumen (Fläche) von $P = P(v_1, v_2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(P) &= \mathrm{vol}(f_A(P)) = \|f_A(v_1)\| \cdot \|f_A(v_2)\| \\ &= \|v_1\| \cdot \| \|v_2\| \cdot \sin(\varphi) u_2\| \\ &= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot |\sin(\varphi)|. \end{aligned}$$

Dies ist die Formel für den Flächeninhalt eines Parallelogramms als das Produkt aus der Länge der Grundseite $\|v_1\|$ mal der Länge der Höhe über dieser Grundseite $\|v_2\| \cdot |\sin(\varphi)|$.

6.3. **Spiegelungen und Drehungen.** Wir betrachten wie in Beispiel 4.9 die **Drehung** $R(\varphi)$ des $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ. Diese ist gegeben bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Wir statten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt aus. Dann ist $R(\varphi)^* = R(-\varphi)$ wegen $D_\varphi^t = D_{-\varphi}$. Für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt dann

$$\|D_\varphi(v)\|^2 = (D_\varphi v)^t D_\varphi v = v^t D_\varphi^t D_\varphi v = v^t D_{-\varphi} D_\varphi v = v^t v = \|v\|^2,$$

oder allgemeiner für $v, w \in \mathbb{R}^2$

$$(D_\varphi(v), D_\varphi(w)) = (D_\varphi v)^t D_\varphi w = v^t D_\varphi^t D_\varphi w = v^t D_{-\varphi} D_\varphi w = v^t w = (v, w).$$

Die Drehung $R(\varphi)$ ist also eine isometrische Abbildung.

Sei $v \in \mathbb{R}$ verschieden von 0. Die **Spiegelung an der Ebene orthogonal zu** v also an $H_v = \langle v \rangle^\perp$ ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} S_v : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ w &\mapsto w - 2\frac{(v, w)}{(v, v)} v. \end{aligned}$$

In der Tat ist die Einschränkung $S_v|_{H_v}$ die Identität auf H_v und

$$S_v(v) = v - 2\frac{(v, v)}{(v, v)} v = v - 2v = -v.$$

Offensichtlich gilt für $\lambda \in K^\times$

$$S_{\lambda v}(w) = w - 2\frac{(\lambda v, w)}{(\lambda v, \lambda v)} \lambda v = w - 2\frac{(v, w)}{(v, v)} v = S_v(w).$$

Es kommt also nur auf die von v aufgespannte Gerade an. Wir nehmen daher OBdA an, daß v normiert ist, und ergänzen zu einer ONB $\mathscr{B} = (b_1 = v, b_2)$. Dann liegt $b_2 \in H_v$ und $S_v(b_2) = b_2$. In dieser Basis nimmt S_v die Matrixgestalt

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(S_v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

an. Diese Matrix ist symmetrisch und bezüglich einer ONB, somit gilt

$$S_v^* = S_v.$$

Sei A_v die Matrix von S_v in der Standardbasis. Die Standardbasis ist auch eine ONB, also gilt $A_v^t = A_v$. Des weiteren ist $A_v^2 = E$ die Einheitsmatrix, denn $S_v \circ S_v = \mathrm{id}$.

Wir rechnen nun wie oben für $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$(S_v(x), S_v(y)) = x^t A_v^t A_v y = x^t (A_v)^2 y = x^t y = (x, y).$$

Die Spiegelung S_v ist somit eine isometrische Abbildung.

6.4. **Bewegungen.** Bewegungen sind Abbildungen, die die metrischen Eigenschaften des Raumes erhalten.

Definition 6.15. (1) Eine **Bewegung** eines euklidischen Vektorraums V ist eine abstandserhaltende Abbildung

$$f : V \to V,$$

also eine Abbildung von Mengen mit der Eigenschaft: für alle $v, w \in V$ gilt

$$d(f(v), f(w)) = d(v, w).$$

(2) Eine **Isometrie** ist eine Bewegung, die eine lineare Abbildung ist.

Beispiel 6.16. (1) Sei V ein euklidischer Vektorraum und $w \in V$. Die **Translation** mit w ist die Bewegung

$$T_w : V \to V$$
$$v \mapsto T_w(v) = v + w.$$

In der Tat ist T_w eine Bewegung, denn für alle $x, y \in V$ gilt

$$d(T_w(x), T_w(y)) = \|T_w(x) - T_w(y)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Die Translation T_w ist genau dann linear, wenn $w = 0$.

(2) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der ℓ^2-Folgen, also der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty.$$

Auf V ist das ℓ^2-Skalarprodukt definiert als

$$((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i.$$

Dann ist $S : V \to V$ definiert durch

$$S((a_1, a_2, a_3, \ldots)) = (0, a_1, a_2, \ldots)$$

eine Bewegung, die nicht bijektiv ist.

Satz 6.17. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum, und $f : V \to V$ eine Abbildung von Mengen. Dann sind äquivalent:*

(a) f ist Isometrie.
(b) f ist Bewegung mit $f(0) = 0$.
(c) f erhält das Skalarprodukt: für alle $v, w \in V$ gilt $(f(v), f(w)) = (v, w)$.
(d) f ist isometrische Abbildung, also insbesondere linear.
(e) f ist linear und normerhaltend, d.h. für alle $v \in V$ gilt $\|f(v)\| = \|v\|$.

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz durch einen Ringschluß: (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (e) $\Longrightarrow$ (a).

(a) $\Longrightarrow$ (b): Sei f eine Isometrie. Dann ist f Bewegung und erhält als lineare Abbildung die Null.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Sei f eine Bewegung, die den Nullpunkt erhält. Wegen $f(0) = 0$ gilt für alle $v \in V$

$$\|f(v)\| = \|f(v) - f(0)\| = d(f(v), f(0)) = d(v, 0) = \|v - 0\| = \|v\|.$$

Bilinearität von (,) liefert analog zur Polarisationsformel für alle $v, w \in V$

$$2(v,w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2. \tag{6.2}$$

Damit folgt (c) aus

$$\begin{aligned}(f(v), f(w)) &= \frac{1}{2}\left(\|f(v)\|^2 + \|f(w)\|^2 - \|f(v)-f(w)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2\right) = (v,w).\end{aligned}$$

(c) $\Longrightarrow$ (d): Sei f skalarprodukterhaltend. Aus (6.2) folgt dann

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2(v,w), \tag{6.3}$$

und somit für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$:

$$\begin{aligned}\|f(\lambda v) - \lambda f(v)\|^2 &= \|f(\lambda v)\|^2 + \|\lambda f(v)\|^2 - 2(f(\lambda v), \lambda f(v))\\ &= \|f(\lambda v)\|^2 + \lambda^2\|f(v)\|^2 - 2\lambda(f(\lambda v), f(v))\\ &= \|\lambda v\|^2 + \lambda^2\|v\|^2 - 2\lambda(\lambda v, v)\\ &= \|\lambda v\|^2 + \|\lambda v\|^2 - 2(\lambda v, \lambda v) = 0\end{aligned}$$

Da 0 der einzige Vektor von Norm 0 ist, folgt, f ist homogen, d.h. für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt

$$f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

Analog zu (6.3) gilt auch für alle $v, w \in V$

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(v,w) \tag{6.4}$$

Für alle $v, w \in V$ berechnet sich mit (6.4) und wieder (6.3)

$$\|f(v+w) - (f(v)+f(w))\|^2$$

$$\begin{aligned}&= \|f(v+w)\|^2 + \|f(v)+f(w)\|^2 - 2(f(v+w), f(v)+f(w))\\ &= \|v+w\|^2 + \|f(v)\|^2 + \|f(w)\|^2 + 2(f(v),f(w)) - 2(f(v+w),f(v)) - 2(f(v+w),f(w))\\ &= \|v+w\|^2 + \left(\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(v,w)\right) - 2(v+w,v) - 2(v+w,w)\\ &= \|v+w\|^2 + \|v+w\|^2 - 2(v+w,v+w) = 0\end{aligned}$$

Da 0 der einzige Vektor von Norm 0 ist, folgt, f ist additiv, d.h. für alle $v, w \in V$ gilt

$$f(v+w) = f(v) + f(w).$$

Zusammen ergeben 'additiv' und 'homogen' die Eigenschaft 'linear'. Linear und skalarprodukterhaltend bedeutet isometrische Abbildung im Sinne dieser Vorlesung.

(d) $\Longrightarrow$ (e): Sei f isometrische Abbildung. Dann gilt für alle $v \in V$

$$\|f(v)\|^2 = (f(v), f(v)) = (v,v) = \|v\|^2,$$

und somit ist f eine linear und normerhaltend.

(e) $\Longrightarrow$ (a): Sei f linear und normerhaltend. Dann gilt für alle $v, w \in V$

$$d(f(v), f(w)) = \|f(v) - f(w)\| = \|f(v-w)\| = \|v-w\| = d(v,w),$$

und somit ist f eine lineare Bewegung: eine Isometrie. □

Bemerkung 6.18. Die Komposition von Bewegungen (Isometrien) ist eine Bewegung (Isometrie).

Wir zeigen nun, daß bis auf eine Translation eine Bewegung linear ist.

Korollar 6.19. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und $F : V \to V$ eine Bewegung. Dann gibt es $w \in V$ und eine Isometrie $f : V \to V$, so daß für alle $v \in V$*

$$F(v) = (T_w \circ f)(v) = f(v) + w.$$

Beweis. Mit $w = F(0)$ ist $f = T_{-w} \circ F$ eine Bewegung mit $f(0) = 0$, also nach Satz 6.17 eine Isometrie. Es gilt dann

$$F = (T_w \circ T_{-w}) \circ F = T_w \circ (T_{-w} \circ F) = T_w \circ f.$$

□

Satz 6.20. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum.*

(1) Eine Isometrie ist ein Automorphismus des zugrundeliegenden Vektorraums.
(2) Eine Bewegung ist bijektiv.

Beweis. Sei $f : V \to V$ eine Isometrie. Dann ist f als lineare Abbildung zwischen endlichdimensinalen Vektorräumen der gleichen Dimension bijektiv genau dann, wenn $\ker(f) = 0$ ist. Sei $v \in V$ und $f(v) = 0$. Dann gilt

$$\|v\| = d(v, 0) = d(f(v), f(0)) = \|f(v)\| = 0,$$

also $v = 0$. Dies zeigt Aussage (1).

Aussage (2) folgt sofort aus Aussage (1) und Korollar 6.19, da Translationen bijektiv sind. □

Jetzt zeigen wir, daß man das Skalarprodukt eines euklidischen Raums mit den Koordinaten bezüglich einer Standardbasis ausrechnen kann, indem man das Standardsklarprodukt des $\mathbb{R}^n$ für die Koordinatenvektoren benutzt.

Lemma 6.21. *Sei $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis eines euklidischen Vektorraums $(V, (\ ,\ ))$. Wir statten $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt aus. Dann sind äquivalent:*

(a) Der Koordinatenisomorphismus $\kappa_{\mathscr{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ ist isometrische Abbildung: für alle $v, w \in V$ gilt

$$(v, w) = \langle \kappa_{\mathscr{B}}(v), \kappa_{\mathscr{B}}(w) \rangle.$$

(b) $\mathscr{B}$ ist ONB.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Wenn $\kappa_{\mathscr{B}}$ eine isomterische Abbildung ist, dann gilt

$$(b_i, b_j) = \langle \kappa_{\mathscr{B}}(b_i), \kappa_{\mathscr{B}}(b_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

und $\mathscr{B}$ ist ONB.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Sei umgekehrt $\mathscr{B}$ eine ONB. Damit ist $\mathscr{B}$ selbstdual und für alle $v \in V$ folgt

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v, b_i) b_i$$

also

$$\kappa_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} (v, b_1) \\ \ldots \\ (v, b_n) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned} (v, w) &= (\sum_{i=1}^{n} (v, b_i) b_i, \sum_{j=1}^{n} (w, b_j) b_j) \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} (v, b_i)(w, b_j)(b_i, b_j) = \sum_{i=1}^{n} (v, b_i)(w, b_i) = \langle \kappa_{\mathscr{B}}(v), \kappa_{\mathscr{B}}(w) \rangle, \end{aligned}$$

und das war zu zeigen. □

Nun charakterisieren wir Isometrien in den linearen Abbildungen.

Satz 6.22. *Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(a) *f ist Isometrie.*
(b) *f führt jede ONB $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ in eine ONB $f(\mathscr{B}) = (f(b_1), \ldots, f(b_n))$ über.*
(c) *Es gibt eine ONB $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, so daß $f(\mathscr{B}) = (f(b_1), \ldots, f(b_n))$ eine ONB ist.*
(d) *Die Spalten der Matrix $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)$ bezüglich einer jeden ONB $\mathscr{B}$ sind normiert und paarweise orthogonal als Vektoren in $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Standardskalarprodukts, d.h. die Spalten sind eine ONB von $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.*
(e) *Es gibt eine ONB $\mathscr{B}$, so daß die Spalten der Matrix $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)$ normiert und paarweise orthogonal als Vektoren in $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Standardskalarprodukts sind, d.h. die Spalten sind eine ONB von $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.*
(f) *$f^* f = \mathrm{id}_V$.*
(g) *f ist invertierbar und $f^{-1} = f^*$.*
(h) *$f f^* = \mathrm{id}_V$.*

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz durch die folgenden Implikationen:

$$\begin{tikzcd}
 & & (c) \arrow[dr, Rightarrow] & & & & \\
(a) \arrow[r, Rightarrow] & (b) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (e) \arrow[r, Rightarrow] & (f) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & (a) & \\
 & & (d) \arrow[ur, Rightarrow] & & & (g) \arrow[r, Leftrightarrow] & (h)
\end{tikzcd}$$

(a) $\Longrightarrow$ (b): Sei $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine ONB und f eine Isometrie. Dann ist f skalarprodukterhaltend nach Satz 6.17 und so gilt

$$(f(b_i), f(b_j)) = (b_i, b_j).$$

Damit ist auch $f(\mathscr{B})$ eine ONB.

(b) $\Longrightarrow$ (c): trivial.

(d) $\Longrightarrow$ (e): trivial.

(b) $\Longrightarrow$ (d) und (c) $\Longrightarrow$ (e) folgen aus dem gleichen Argument: Sei $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine ONB, so daß $f(\mathscr{B})$ auch eine ONB ist. Die j-te Spalte v_j von $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)$ ist $v_j = \kappa_{\mathscr{B}}(f(b_j))$. Mit Lemma 6.21 rechnen wir

$$\langle v_j, v_i \rangle = \langle \kappa_{\mathscr{B}}(f(b_j)), \kappa_{\mathscr{B}}(f(b_i)) \rangle = (f(b_i), f(b_j)) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

(e) $\Longrightarrow$ (f): Das Produkt $f^* f$ berechnen wir mittels Matrizen zur ONB $\mathscr{B}$. Dann ist $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)$ und $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f^*) = A^t$ nach Satz 4.8, denn $\mathscr{B}^* = \mathscr{B}$. Seien v_i mit $1 \leq i \leq n$ die Spaltenvektoren von A. Dann ist der ij-te Eintrag von $A^t A$ gerade

$$(A^t A)_{ij} = v_i^t v_j = \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Das bedeutet $A^t A = E$ ist die Einheitsmatrix und zurückübersetzt: $f^* f = \mathrm{id}_V$.

(f) $\Longrightarrow$ (a): Für alle v, w gilt

$$(f(v), f(w)) = (v, f^*(f(w))) = (v, w),$$

also ist f skalarprodukterhaltend und nach Satz 6.17 eine Isometrie.

(g) $\Longrightarrow$ (f) und (h): trivial.

(f) oder (h) $\Longrightarrow$ (g): Wegen $f^*f = \mathrm{id}_V$ (oder $ff^* = \mathrm{id}_V$) ist f surjektiv (oder injektiv) und als Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums auch bijektiv. Dann muß aber das Linksinverse (oder Rechtsinverse) schon Inverses sein: $f^{-1} = f^*$. □

Korollar 6.23. *Isometrien sind normale Endomorphismen.*

Beweis. Da $f^* = f^{-1}$ folgt $ff^* = \mathrm{id} = f^*f$. □

Korollar 6.24. *Ist f Isometrie eines euklidischen Vektorraums, dann gilt* $\det(f) = \pm 1$.

Beweis. Die Determinante berechnen wir als $\det(f) = \det(A)$ mit der Matrix $A = \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f)$ bezüglich einer ONB $\mathscr{B}$. Dann gilt nach Satz 6.22, daß $AA^t = E$, also

$$\det(A)^2 = \det(A)\det(A^t) = \det(AA^t) = \det(E) = 1.$$

Damit muß $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$ gelten. □

Bemerkung 6.25. Korollar 6.24 bedeutet insbesondere, daß sich das Volumen eines Parallelotops unter einer Isometrie nicht ändert. Das soll auch so sein, schließlich ist eine Isometrie eine Bewegung, die sämtliche metrische Eigenschaften erhalten soll.

Definition 6.26. Eine **reelle orthogonale Matrix** ist eine Matrix in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so daß $AA^t = E$ gilt mit der Einheitsmatrix $E \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Korollar 6.27. *(1) Die Isometrien des $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Standardskalarprodukts sind genau die Matrixmultiplikationen mit reellen orthogonalen Matrizen.*
(2) Sei A orthogonale Matrix. Dann gilt $\det(A) = \pm 1$.

Beweis. (1) Das folgt sofort aus Satz 6.22, genauer dem obigen Beweis. Aussage (2) folgt wegen (1) aus Korollar 6.24. □

Korollar 6.28. *Sei $\mathscr{B}$ eine ONB des euklidischen Vektorraums V und sei $S = \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(\mathrm{id}_V)$ die Basiswechselmatrix zu einer weiteren Basis $\mathscr{C}$. Dann ist $\mathscr{C}$ eine ONB genau dann, wenn S eine orthogonale Matrix ist.*

Beweis. Die Matrix S erfüllt $\kappa_{\mathscr{C}}(v) = S\kappa_{\mathscr{B}}(v)$ für alle $v \in V$. Damit ist $\kappa_{\mathscr{C}} = S \circ \kappa_{\mathscr{B}}$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\kappa_{\mathscr{B}}"'] & V \arrow[d, "\kappa_{\mathscr{C}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "S"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

kommutiert. Nach Lemma 6.21 ist $\kappa_{\mathscr{B}}$ isometrisch und $\mathscr{C}$ ist ONB genau dann, wenn $\kappa_{\mathscr{C}}$ isometrisch ist. Aufgrund des Diagramms ist dies äquivalent dazu, daß S eine Isometrie ist, was nach Korollar 6.27 genau für orthogonale S zutrifft. □

Bemerkung 6.29. Für gewöhnliche Vektorräume benutzt man eine Basis, um Koordinaten einzuführen. Basiswechsel werden durch Multiplikation mit einer Basiswechselmatrix durchgeführt, die invertierbar ist.

Für euklidische Vektorräume nehmen die Orthonormalbasen die Rolle ein, die gewöhnlicher Basen für Vektorräume spielen. Eine ONB führt rechtwinklige Koordinaten ein, und ein Basiswechsel wird durch eine orthogonale Matrix vermittelt. Ist S orthogonal, so wird der Basiswechsel einer Matrix zu einem Endomorphismus

$$SAS^{-1} = SAS^t$$

etwas dadurch vereinfacht, daß sich das Inverse durch Transponieren berechnen läßt.

Proposition 6.30. *Jeder reelle Eigenwert einer orthogonalen Matrix (bzw. einer Isometrie) ist entweder* 1 *oder* -1.

Beweis. Vermöge der Übersetzung von linearen Abbildungen in Matrizen folgt die Aussage für eine Isometrie sofort aus der für eine orthogonale Matrix.

Sei A eine orthogonale Matrix und λ ein (reeller) Eigenwert von A. Sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann gilt

$$\|v\| = \|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|,$$

und daher $\lambda = \pm 1$. □

Bemerkung 6.31. Nach Korollar 6.23 sind Isometrien f normale Endomorphismen. Der Spektralsatz in der Form von Theorem 4.20 greift aber nur für solche, deren charakteristisches Polynom über $\mathbb{R}$ in lineare Faktoren zerfällt. In diesem Fall gibt es dann nach Aussage des Spektralsatzes (nachdem man die Vektoren der Orthogonalbasis normiert hat) eine ONB $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ für die $f(b_i) = \pm b_i$ gilt. Nach eventueller Umordnung gibt es dann $r, s \in \mathbb{N}_0$ mit $n = r + s$ und

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_s \end{pmatrix},$$

wobei E_r und E_s die Einheitsmatrizen der entsprechenden Größe r und s sind. Dies ist ein Produkt der Spiegelungen $S_i = S_{b_i}$ an den Ebenen $\langle b_i \rangle^{\perp}$ für $i = r+1, \ldots, r+s = n$, wie man leicht nachrechnet. Dies ist eine sehr eingeschränkte Klasse von Isometrien.

Um den Spektralsatz auch für die anderen Isometrien zu bekommen, muß man die Aussage abschwächen und Drehkästchen erlauben. Dann erhält man die Isometrie–Normalform, siehe Theorem 6.39.

6.5. **Die orthogonale Gruppe.** Die Menge der Isometrien eines euklidischen Vektorraums V bildet eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$.

Definition 6.32. (1) Die **orthogonale Gruppe** einer perfekten Bilinearform $(\, , \,)$ auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V ist definiert als

$$\mathrm{O}(V) = \{f : V \to V \; ; \; f \in \mathrm{GL}(V) \text{ und für alle } v, w \in V \text{ gilt } (f(v), f(w)) = (v, w)\}.$$

(2) Eine **orthogonale Matrix** ist eine Matrix in $\mathrm{GL}_n(K)$, so daß $AA^t = E$ gilt mit der Einheitsmatrix $E \in \mathrm{GL}_n(K)$. Die **orthogonale Gruppe** von Matrizen ist

$$\mathrm{O}_n(K) = \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \; ; \; AA^t = E\}.$$

Bemerkung 6.33. (1) Die Menge $\mathrm{O}(V)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$, denn mit $f, g \in \mathrm{O}(V)$ ist auch fg und f^{-1} in $\mathrm{O}(V)$. Unsere Notation ist hier schlampig, denn $\mathrm{O}(V)$ hängt natürlich wesentlich von der Wahl von $(\, , \,)$ ab.

(2) Die Menge $\mathrm{O}_n(K)$ ist eine Gruppe, denn mit $V = (K^n, \langle -, - \rangle)$ gilt $\mathrm{O}_n(K) = \mathrm{O}(V)$, wenn man Endomorphismen des K^n mit Matrizen in $\mathrm{M}_n(K)$ identifiziert. In der Tat folgt aus $AA^t = E$, daß A invertierbar ist und dann auch $A^t A = E$, womit für alle $v, w \in K^n$ gilt

$$\langle Av, Aw \rangle = (Av)^t Aw = v^t A^t A w = v^t w = \langle v, w \rangle.$$

Dies zeigt $\mathrm{O}_n(K) \subseteq \mathrm{O}(V)$. Umgekehrt folgt aus $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in K^n$ durch Auswerten auf der Standardbasis schon $A^t A = E$ und dann auch $AA^t = E$.

(3) Im speziellen Fall $K = \mathbb{R}$ schreibt man auch

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}).$$

Definition 6.34. (1) Die **spezielle orthogonale Gruppe** einer perfekten Bilinearform $(\, , \,)$ auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V ist definiert als

$$\mathrm{SO}(V) = \{f \in \mathrm{O}(V) \; ; \; \det(f) = 1\}.$$

(2) Die **spezielle orthogonale Gruppe** von Matrizen ist

$$\mathrm{SO}_n(K) = \{A \in \mathrm{SL}_n(K) \; ; \; AA^t = E\}.$$

Bemerkung 6.35. Die Gruppe $\mathrm{SO}(V)$ (bzw. $\mathrm{SO}_n(K)$) ist Untergruppe von $\mathrm{O}(V)$ (bzw. $\mathrm{O}_n(K)$). Im speziellen Fall $K = \mathbb{R}$ schreibt man auch

$$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}).$$

Satz 6.36. *(1) Die Gruppe* $\mathrm{SO}(2)$ *enthält genau die Drehungen. Genauer ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} &\to \mathrm{SO}(2) \\ \varphi + 2\pi\mathbb{Z} &\mapsto D_\varphi \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.

(2) Die Gruppe $\mathrm{O}(2)$ *enthält genau die Drehungen und Spiegelungen.*

Beweis. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

eine orthogonale Matrix, also mit $AA^t = E$. Dann bilden die Spalten eine ONB von $\mathbb{R}^2$, was zu folgendem Gleichungssystem führt:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1, \\ ab + cd &= 0, \\ b^2 + d^2 &= 1. \end{aligned}$$

Aus $a^2 + c^2 = 1$ folgt, daß es einen Winkel φ gibt, mit

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Da $ab + cd = 0$ folgt die Existenz von $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ mit

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Aus $b^2 + d^2 = 1$ folgt $|\lambda| = 1$. Damit ist A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\lambda\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \lambda\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

und $\det(A) = \lambda(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) = \lambda$.

(1) Sei nun $A \in \mathrm{SO}(2)$, also $\det(A) = 1$. Dann ist $A = D_\varphi$ eine Drehung. Damit haben wir gesehen, daß die Abbildung

$$D : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2)$$

mit

$$D(\varphi) = D_\varphi$$

surjektiv ist. Die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus zeigen, daß D ein Gruppenhomomorphismus ist:

$$\begin{aligned} D_\varphi D_\psi &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) & -\cos(\varphi)\sin(\psi) - \sin(\varphi)\cos(\psi) \\ \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\sin(\psi) & -\sin(\varphi)\sin(\psi) + \cos(\varphi)\cos(\psi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix} = D_{\varphi+\psi}. \end{aligned}$$

Der Rest von (1) folgt aus dem Homomorphiesatz angewandt auf den surjektiven Gruppenhomomorphismus $D : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2)$. Dazu braucht man den Kern von D, also

$$\ker(D) = \{\varphi \ ; \ D_\varphi = E\} = \{\varphi \ ; \ \exists n \in \mathbb{Z} : \varphi = 2\pi n\} = 2\pi\mathbb{Z}.$$

Für Aussage (2) fehlt nur noch, die Matrix A im Fall $\lambda = -1$ als Matrix einer Spiegelung zu identifizieren, also

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Wir setzen

$$v = \begin{pmatrix} \sin(\varphi/2) \\ -\cos(\varphi/2) \end{pmatrix}$$

und orthogonal dazu

$$w = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \end{pmatrix}$$

und rechnen mittels der Additionstheoreme

$$Av = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\varphi/2) - \sin(\varphi)\cos(\varphi/2) \\ \sin(\varphi)\sin(\varphi/2) + \cos(\varphi)\cos(\varphi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi/2 - \varphi) \\ \cos(\varphi/2 - \varphi) \end{pmatrix} = -v$$

$$Aw = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\varphi/2) + \sin(\varphi)\sin(\varphi/2) \\ \sin(\varphi)\cos(\varphi/2) - \cos(\varphi)\sin(\varphi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi - \varphi/2) \\ \sin(\varphi - \varphi/2) \end{pmatrix} = w$$

Damit beschreibt A eine Spiegelung an der Ebene $\langle w \rangle$ und nimmt in der ONB (w, v) die Form

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

an. Also besteht $\mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$ ausschließlich aus Spiegelungen. $\square$

Bemerkung 6.37. Die Gruppe $\mathrm{O}(2)$ ist eine Art kontinuierliche Diedergruppe. Für jedes $n \geq 1$ gibt es einen natürlichen injektiven Gruppenhomomorphsimus $D_n \hookrightarrow \mathrm{O}(2)$.

Korollar 6.38. *Jede Drehung in* $\mathrm{SO}(2)$ *ist das Produkt zweier Spiegelungen aus* $\mathrm{O}(2)$.

Beweis. Mit $v = \begin{pmatrix} \sin(\varphi/2) \\ -\cos(\varphi/2) \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt die Zerlegung

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S_v S_w.$$

$\square$

Satz 6.36 beweist den zweidimensionalen Fall der folgenden allgemeinen Isometrienormalform.

Theorem 6.39 (Isometrie–Normalform)**.** *Sei $f : V \to V$ eine Isometrie eines euklidischen Vektorraums V der Dimension n (bzw. eine orthogonale Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$). Dann gibt es eine ONB $\mathscr{B}$ von V (bzw. eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) und $r, s, t \in \mathbb{N}_0$ mit $n = r + s + 2t$ und Winkel $0 < \varphi_1 \leq \ldots \leq \varphi_t < \pi$, so daß die f darstellende Matrix (bzw. die konjugierte Matrix) die folgende Isometrie–Normalform annimmt:*

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f) \quad (\text{ bzw. } SAS^{-1}) = \begin{pmatrix} E_r & & & & \\ & -E_s & & & \\ & & D_{\varphi_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_{\varphi_t} \end{pmatrix}.$$

Hier ist E_r (bzw. E_s die Einheitsmatrix der Größe r (bzw. s) und

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

die Drehmatrix zum Winkel φ.

Korollar 6.40. *(1) Jede orthogonale Matrix ist Produkt von Spiegelungen.*
(2) Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$ wird durch Spiegelungen erzeugt.

Beweis. (1) Nach Theorem 6.39 reicht es, die Isometrie-Normalform als Produkt von Spiegelungen zu schreiben. Außerdem reicht es aus, jedes Drehkästchen einzeln als Produkt von zwei Spiegelungen zu schreiben und dann aufzumultiplizieren. Dies gelingt nach Korollar 6.38.

Aussage (2) ist eine triviale Folge von Aussage (1). □

Zum Beweis von Theorem 6.39 benötigen wir einen wichtigen algebraischen Fakt.

Theorem 6.41. *Die irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[X]$ sind entweder linear oder quadratisch.*

Beweis. Sei $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ irreduzibel und normiert. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Theorem 7.10) hat jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten (und damit auch mit reellen Koeffizienten) eine Nullstelle: es gibt ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0$. Wenn $\alpha \in \mathbb{R}$ sogar reell ist, setzen wir

$$h(X) = X - \alpha$$

ansonsten, wenn $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dann setzen wir mit dem komplex konjugierten $\bar{\alpha}$

$$h(X) = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha}.$$

In jedem Fall ist $h(X) \in \mathbb{R}[X]$ und $h(\alpha) = 0$.

Sei $d(X)$ der normierte ggT von $h(X)$ und $f(X)$. Dann gibt es nach dem Satz von Bézout, Satz 8.8 aus Grundlagen der Algebra, $a(X), b(X) \in \mathbb{R}[X]$ mit

$$d(X) = a(X)h(X) + b(X)f(X).$$

Da $f(X)$ irreduzibel (also prim) ist, gibt es genau 2 Möglichkeiten: entweder $d(X) = 1$ oder $d(X) = f(X)$. Da

$$d(\alpha) = a(\alpha)h(\alpha) + b(\alpha)f(\alpha) = 0$$

scheidet die erste Möglichkeit aus. Damit ist $d(X) = f(X)$ und

$$\deg(f) = \deg(d) \leq \deg(h) \leq 2,$$

was zu beweisen war. □

Bemerkung 6.42. Genauer haben wir in Theorem 6.41 bewiesen, daß die irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[X]$ von der Form

$$\begin{array}{ll} X - \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ X - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha}, & \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{array}$$

sind.

Beweis von Theorem 6.39. Der Beweis läuft parallel zum Beweis des Spektralsatzes für zerfallende normale Operatoren, Theorem 4.20. Wir arbeiten per Induktion nach $n = \dim(V)$. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial. Wir überlegen uns die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ ebenfalls, da der Induktionsschritt im Wesentlichen darauf basiert.

Schritt 1: Dimension 1. Für $n = 1$ haben die Isometrien einen Eigenvektor und damit nach Proposition 6.30 den Eigenwert ± 1. Damit gilt die Isometrienormalform.

Schritt 2: Dimension 2. Das ist gerade Satz 6.36.

Schritt 3: Ein irreduzibler Faktor. Wir nehmen an, daß $n > 0$ ist und die Aussage von Theorem 6.39 für Isometrien von euklidischen Vektorräumen der Dimension $< n$ gilt. Sei $q(X)$ ein normierter irreduzibler Faktor des charakteristischen Polynoms $P_f(X)$. Nach Theorem 6.41 ist $\deg(q) \leq 2$. Außerdem ist der Unterraum

$$V_q(f) = \{v \in V \ ; \ q(f)(v) = 0\} = \ker(q(f)) \neq 0$$

nicht der Nullraum, siehe Satz 8.34 aus Grundlagen der Algebra. Wir wählen $v \in V_q(f)$, $v \neq 0$.

Jetzt kommt eine Fallunterscheidung nach $\deg(q)$.

Schritt 4: $q(X)$ linear. Wenn $\deg(q) = 1$, dann ist $q(X) = X - \lambda$ für einen Eigenwerte λ von f. Dann ist $\lambda = \pm 1$ nach Proposition 6.30 und mit $W = \langle v \rangle^{\perp}$ erhalten wir wie im Beweis von Theorem 4.20 eine f-invariante und $f^* = f^{-1}$-invariante Zerlegung

$$V = \langle v \rangle \perp W.$$

Schritt 5: $q(X)$ quadratisch. Wenn $\deg(q) = 2$, etwa $q(X) = X^2 - aX - b$ mit gewissen $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist $U = \langle v, f(v) \rangle$ ein 2-dimensionaler f-invarianter Unterraum. In der Tat ist (Auswertung von f auf einem Erzeugenensystem von U)

$$\begin{aligned} f(v) &= f(v) \in U \\ f(f(v)) &= f^2(v) = (q(f) + af + b)(v) = q(f)(v) + af(v) + bv = af(v) + bv \in U. \end{aligned}$$

Da f Isometrie ist, hat f nicht den Eigenwert 0 und somit ist 0 keine Nullstelle von $P_f(X)$. Es folgt $b \neq 0$. Dann folgt aus $0 = q(f)(v) = f^2(v) - af(v) - bv$ durch Anwendung von f^{-1}, Multiplikation mit b^{-1} und Umsortieren

$$f^{-1}(v) = \frac{1}{b} f(v) - \frac{a}{b} v \in U.$$

Der Unterraum U ist also auch $f^* = f^{-1}$-invariant.

Wir setzen wieder $W = U^{\perp}$ und betrachten die orthogonale Zerlegung

$$V = U \perp W.$$

Dann ist W wieder f-invariant: zu $w \in W$ und $u \in U$ folgt $f^*(u) \in U$ und somit

$$(f(w), u) = (w, f^*(u)) = 0.$$

Damit gilt $f(w) \in U^{\perp} = W$.

Schritt 6: Zusammenfügen. Die Einschränkungen $f|_U$ und $f|_W$ von f auf U und W sind weiterhin Isometrien, jetzt bezüglich der Einschränkung des Skalarprodukts von V auf U bzw. auf W (was ein Skalarprodukt bleibt!). Per Induktionsannahme hat $f|_W$ die verlangte Form, und $f|_U$ wurde als Induktionsanfang behandelt. Sei $\mathscr{C}$ (bzw. $\mathscr{D}$) eine Basis von U (bzw. W), so daß $f|_U$ (bzw. $f|_W$ in Isometrie-Normalform erscheint. Sei $\mathscr{B}$ die Basis von V, die durch zusammenfügen von $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ entsteht. Dann hat f wegen

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}(f|_U) & \\ & \mathrm{M}_{\mathscr{D}}^{\mathscr{D}}(f|_W) \end{pmatrix}$$

bezüglich $\mathscr{B}$ eine Matrix mit den erlaubten Block-Diagonaleinträgen. Eventuelles umsortieren der gefundenen Basis bring die Kästchen der Matrix in die gewünschte Reihenfolge der Isometrie-Normalform. $\square$

Korollar 6.43. *Sei f bzw. A wie in Theorem 6.39. Dann ist das charakteristische Polynom*

$$P_f(X) = P_A(X) = (X-1)^r (X+1)^s \prod_{i=1}^{t} (X^2 - 2\cos(\varphi_i) X + 1)$$

und das Minimalpolynom enthält jeden irreduziblen Faktor des charakteristischen Polynoms genau einmal.

Beweis. Dies liest man sofort aus der Blockdiagonalform der Isometrie-Normalform ab. $\square$

Bemerkung 6.44. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ die Matrix von f bezüglich einer ONB von V. (Oder man startet gleich mit einem A; das ist der Fall $f =$ Multiplikation mit A auf $V = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt.)

Es ist dann f eine Isometrie genau dann, wenn A orthogonale Matrix ist, und das testet man durch Nachweis von

$$A^t A = E.$$

Sei dies erfüllt, dann findet man die Isometrie-Normalform durch Faktorisieren des charakteristischen Polynoms. Nach Korollar 6.43 treten die Nullstelle ± 1 mit der Vielfachheit auf, in der ± 1 als Diagonaleintrag in der Isometrie-Normalform auftritt. Und jeder quadratische Faktor ist von der Form

$$X^2 - 2\cos(\varphi)X + 1,$$

woraus der eindeutige Drehwinkel $\varphi \in (0, \pi)$ des zugehörigen Kästchens bestimmt werden kann. Die Winkel 0 und π treten nicht auf, da dann der quadratische Faktor nicht irreduzibel ist.

Die geeignete Basis $\mathscr{B}$ zu finden, in der f bzw. A Isometrie-Normalform annimmt, ist aufwendiger, aber auch aus dem Beweis von Theorem 6.39 herauszulesen. Man bestimme Basen zu den Eigenräumen zum Eigenwert ± 1 und auch die verallgemeinerten Eigenräume $V_q(f)$ zu den quadratischen Faktoren. Dabei arbeitet man am besten jeweils mit dem orthogonalen Komplement des bereits bestimmten Teils der Basis $\mathscr{B}$. Hat man $V_q(f)$ für ein quadratisches q bestimmt, so wählt man ein normiertes $v \in V_q(f)$ beliebig und betrachtet dann $w \in \langle v, f(v)\rangle$ und $w \perp v$. Diese v, w bilden dann einen Teil von $\mathscr{B}$, und zwar einen zu einem Drehkästchen gehörigen Teil. Weiter arbeitet man mit dem orthogonalen Komplement des bereits konstruierten, so daß der verbleibende Teil von V immer kleinere Dimension hat. Nach endlich vielen Schritten ist man fertig.

Übungsaufgaben zu §6

Übungsaufgabe 6.1. Wir betrachen im $\mathbb{R}^3$ den Würfel mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Die Raumdiagonalen, das sind die Geraden durch gegenüberliegende Ecken des Würfels treffen sich im Punkt $0 \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Winkel zwischen zwei dieser Raumdiagonalen. Hängt das Ergebins von der Wahl der Raumdiagonalen ab?

Übungsaufgabe 6.2. Ein regelmäßiger Tetraeder ist ein dreidimensionaler Körper mit 4 Ecken, 6 gleich langen Kanten zwischen diesen Ecken und 4 gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen. Zeigen Sie, daß die Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_4 \in \mathbb{R}^4$ die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders sind.

Übungsaufgabe 6.3. Auf $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Bilinearform der Signatur $(3, 1)$, welche für $x, y \in \mathbb{R}^4$ durch

$$\eta(x, y) = x^t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} y$$

gegeben ist. Auf der Teilmenge

$$V = \{x = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ t > 0, \ \eta(x, x) < 0\}$$

definieren wir eine „Norm“ durch

$$\|x\|_\eta = \sqrt{-\eta(x, x)}.$$

Zeigen Sie:

(1) Wenn $x, y \in V$, dann auch $x + y \in V$.
(2) Für $\|-\|_\eta$ gilt nicht die Dreiecksungleichung, sondern die „falsche“ Dreiecksungleichung

$$\|x + y\|_\eta \geq \|x\|_\eta + \|y\|_\eta.$$

Anmerkung: Wenn man die Lichtgeschwindigkeit auf $c = 1$ normiert (kann man machen in den richtigen Einheiten), dann ist η die Minkowskimetrik auf der 4-dimensionalen Raumzeit. Die Menge V besteht dann aus den aus physikalischer Sicht von 0 aus erreichbaren Punkten, wenn man dem Postulat folgt, daß nichts schneller als Licht unterwegs sein darf. Der Wert $\|x\|_\eta$ ist die nach der speziellen Relativitätstheorie vom mitfliegenden Betrachter erlebte verstrichene Eigenzeit auf der direkten geradlinigen Reise von 0 nach x. Die falsche Dreiecksungleichung beschreibt, daß die Reise auf gerader Linie von 0 nach $x+y$ mehr Eigenzeit in Anspruch nimmt als die Reise von 0 nach x und dann von x nach $x+y$.

Mit dieser Beobachtung kann man das Zwillingsparadoxon der speziellen Relativitätstheorie erklären: Von zwei Zwillingsschwestern geht Antonia auf eine lange schnelle Reise zu einem andern Stern, und Barbara bleibt auf der Erde. Nach der Rückkehr Antonias ist diese plötzlich jünger als Barbara, und zwar desto jünger je schneller sie unterwegs war.

Antonias Reise verläuft idealisiert von 0 nach $x = (x_1, x_2, x_3, t)$ und dann weiter nach

$$(2t, 0, 0, 0) = x + y$$

mit $y = (-x_1, -x_2, -x_3, t)$, während Barbaras Reise direkt von 0 nach $x+y$ verläuft.

Übungsaufgabe 6.4. Zeigen Sie, daß die Matrixmultiplikation mit

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{9}{25} & -\frac{4}{5} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$$

eine Isometrie des $\mathbb{R}^3$ (mit Standardskalarprodukt) beschreibt. Bestimmen Sie die Isometrienormalform von A.

Übungsaufgabe 6.5. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade natürliche Zahl und $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, daß A einen reellen Eigenvektor hat.

Übungsaufgabe 6.6. Zeigen Sie, daß jede orthogonale Matrix $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ eine Drehung um eine Drehachse $\mathbb{R}v$ ist, d.h., es gibt einen Eigenvektor v zum Eigenwert 1.

Übungsaufgabe 6.7. In dieser Aufgabe wollen wir eine elegante Methode zur Beschreibung von Drehungen des $\mathbb{R}^3$ behandeln, die in 3D-Computergraphik angewandt wird. Diese Aufgabe benutzt Begriffe aus der Vorlesung Grundlagen der Algebra (und fällt auch ansonsten offensichtlich aus dem Rahmen, ist aber zu interessant, um nicht gestellt zu werden).

Die Hamiltonschen Quaternionen kann man definieren als die Menge $\mathbb{H} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ der Matrizen

$$\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$$

mit $z, w \in \mathbb{C}$ beliebig. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\mathbb{H}$ ist ein Unterring des Matrizenrings $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

(b) $\mathbb{H}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 4 mit Basis

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad i := \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}, \quad j := \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad k := \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}.$$

(c) Wir identifizieren die lineare Hülle von $\mathbf{1} \in \mathbb{H}$ mit $\mathbb{R}$ durch $\lambda \mapsto \lambda \cdot \mathbf{1}$ und setzen

$$\mathbb{H}_+ = \langle \mathbf{1} \rangle = \mathbb{R}$$
$$\mathbb{H}_- = \langle i, j, k \rangle$$

mit linearen Hüllen als $\mathbb{R}$-Untervektorräume. Dann ist $\mathbb{H} = \mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{H}_-$ die Eigenraumzerlegung bezüglich der Involution von $\mathbb{H}$, genannt die **Konjugation**, welche induziert wird von der Involution auf $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, die sowohl die Matrix transponiert als auch die Einträge komplex konjugiert. Wir schreiben $\overline{\alpha}$ für das Konjugierte zu $\alpha \in \mathbb{H}$.

(d) Sei $\pi_+ : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ die Projektion auf den Summanden $\mathbb{H}_+ = \mathbb{R}$. Dann definiert

$$(\alpha, \beta) = \pi_+(\alpha\overline{\beta})$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{H}$. Bestimmen Sie die Matrix des Skalarprodukts bezüglich der Basis $1, i, j, k$.

(e) Wir bezeichnen die Menge der Norm-1-Elemente

$$\{\alpha \in \mathbb{H} \,|\, \alpha\overline{\alpha} = 1\} \subset \mathbb{H}$$

als 3-Sphäre S^3 (erkläre dies). Zeige, daß die Multiplikation von Quaternionen aus S^3 eine Gruppe macht und daß ein Quaternion α zu S^3 gehört, genau dann wenn $\alpha^{-1} = \overline{\alpha}$.

(f) Zu $\alpha \in S^3$ definieren wir $\varphi_\alpha : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ mittels der Quaternionenmultiplikation wie folgt:

$$\varphi_\alpha(x) = \alpha(x)\alpha^{-1}.$$

Zeigen Sie, daß φ_α zu $\alpha \in S^3$ die Zerlegung $\mathbb{H} = \mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{H}_-$ respektiert und φ_α orthogonal ist bezüglich des Skalarprodukts aus (d).

(g) Identifiziert man $\mathbb{H}_-$ mit $\mathbb{R}^3$ durch die Basis i, j, k, so liefert die Konstruktion aus (f) einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : S^3 \to \mathrm{SO}(3), \quad \alpha \mapsto \varphi_\alpha|_{\mathbb{H}_-},$$

mit Kern $\ker(\varphi) = \{\pm 1\}$.

(h) Jedes Quaternion $\alpha \in S^3$ läßt sich schreiben als

$$\alpha = \cos\theta + \sin\theta\big(v_1 i + v_2 j + v_3 k\big),$$

wobei $0 \le \theta < \pi$ und $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor ist. Wie eindeutig ist die Korrespondenz $\alpha \leftrightarrow (\theta, v)$ und kommen alle Paare (θ, v) mit obigen Eigenschaften vor?

(f) Sei $\alpha = \cos\theta + \sin\theta\big(v_1 i + v_2 j + v_3 k\big) \in S^3$. Zeige, daß die orthogonale Abbildung $\varphi(\alpha)$ des $\mathbb{R}^3$ die Drehung um die Achse $\mathbb{R}v$ mit dem Drehwinkel 2θ ist. Ist der Gruppenhomomorphismus φ aus (g) surjektiv?

7. Die Hauptachsentransformation

Ziel ist der folgende Satz mit geometrischer Bedeutung.

Theorem 7.1 (Hauptachsentransformation)**.** *Sei $A \in \mathbb{R}^n$ eine symmetrische Matrix. Dann gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$, so daß*

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

für reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Korollar 7.2. *Eine reelle symmetrische Matrix hat ein charakteristisches Polynom, das in $\mathbb{R}[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.*

Beweis. Sei A symmetrisch und S wie in Theorem 7.1. Die Matrizen A und SAS^{-1} haben dasselbe charakteristische Polynom, und für Diagonalmatrizen zerfällt es in Linearfaktoren. □

Korollar 7.3. *Sei V ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine ONB aus Eigenvektoren von f.*

Beweis. Wir wählen eine erste ONB $\mathscr{B}$ beliebig. Die darstellende Matrix $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)$ für f ist dann symmetrisch. Nach Theorem 7.1 gibt es eine orthogonale Matrix S, so daß SAS^{-1} Diagonalgestalt hat. Dieses S ist die Basiswechselmatrix in eine Basis $\mathscr{C}$ von Eigenvektoren von f. Als orthogonale Matrix wechselt S wieder in eine ONB nach Korollar 6.28. □

Bemerkung 7.4. (1) Betrachten wir eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ als Endomorphsimus von $\mathbb{R}^n$, oder besser als Matrix bezüglich einer Basis $\mathscr{B}$ eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ für einen $\mathbb{R}$-Verktorraum V, dann hat der Basiswechsel zu einer Basis $\mathscr{C}$ den Effekt

$$A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f) \rightsquigarrow SAS^{-1} = \mathrm{M}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}(f)$$

mit $S = \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(\mathrm{id}_V)$. Faßt man hingegen A als Gram'sche Matrix einer Bilinearform $(\ ,\ )$ auf V zur Basis $\mathscr{B}$ auf, so hat der Basiswechsel zu $\mathscr{C}$ den Effekt

$$A = \mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}((\ ,\ )) \rightsquigarrow (S^{-1})^t A S^{-1} = \mathrm{M}^{\mathscr{C},\mathscr{C}}((\ ,\ )).$$

Unter einem orthogonalen Basiswechsel, und nur für S orthogonal stimmen wegen

$$S^{-1} = S^t \in \mathrm{O}(n)$$

die beiden Transformationen überein! Ein Normalformensatz für einen Endomorphismus übersetzt sich in einen Normalformensatz für eine Bilinearform und umgekehrt unter der Voraussetzung, daß von einem orthogonalen Basiswechsel die Rede ist (wie beim Spektralsatz).

(2) Der Diagonalformensatz Theorem 2.20 diagonalisiert symmetrische Bilinearformen über einem beliebigen Körper mit $2 \in K^\times$. Der auftretende Basiswechsel ist aus $\mathrm{GL}_n(K)$.

Im Vergleich dazu studiert die Hauptachsentransformation Theorem 7.1 vor dem Hintergrund eines euklidischen Vektorraums eine weitere Bilinearform, die mittels orthogonalem (bezüglich der euklidischen Struktur) Basiswechsel (im Fall von $\mathbb{R}^n$ aus $\mathrm{O}(n)$) in eine Diagonalform gebracht wird.

Diagonalformensatz		**Hauptachsentransformation**
eine symmetrische Bilinearform		zwei symmetrische Bilinearformen
	$\leftrightarrow$	eine davon Skalarprodukt
$2 \in K^\times$		über $\mathbb{R}$
Basiswechsel aus $\mathrm{GL}_n(K)$		Basiswechsel aus $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Korollar 7.5. *Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann gibt es eine ONB von $\mathbb{R}^n$, die auch für die symmetrische Bilinearform $(\ ,\ )_A$ definiert für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ durch*

$$(v, w)_A = \langle v, Aw \rangle$$

orthogonal ist und diese damit in Diagonalgestalt überführt.

Beweis. Sei S orthogonal wie in Theorem 7.1 mit SAS^{-1} diagonal ist mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathscr{B} = (S^t e_1, \ldots, S^t e_n)$ auch ONB nach Korollar 6.28, denn auch $S^t = S^{-1}$ ist orthogonal. Und $(\ ,\ )_A$ hat bezüglich Basis $\mathscr{B}$ eine Gram'sche Matrix mit Einträgen (man beachte $S^t = S^{-1}$)

$$(S^t e_i, S^t e_j)_A = (S^t e_i)^t A S^t e_j = e_i^t (SAS^{-1}) e_j = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

also die geforderte Diagonalform. $\square$

7.1. **Anwendung auf Quadriken.** Eine quadratische Form $q(X_1, \ldots, X_n)$ ist nichts anderes als die zweite symmetrische Bilinearform $(v, v)_A$ aus Korollar 7.5 geschrieben als formaler Ausdruck in Variablen $X_1, \ldots, X_n$ als Koeffizienten für den eingesetzen Vektor v, also ausgewertet für

$$v = X_1 e_1 + \ldots + X_n e_n.$$

Daher ergibt sich sofort die folgende Umformulierung.

Korollar 7.6. *Zu einer quadratischen Form auf $\mathbb{R}^n$*

$$q(X_1, \ldots, X_n)$$

gibt es eine ONB von $\mathbb{R}^n$ mit Koordinaten $U_1, \ldots, U_n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, so daß die quadratische Form die Gestalt

$$\lambda_1 U_1^2 + \ldots + \lambda_n U_n^2$$

annimmt.

Die folgenden Bilder illustrieren den Namen Hauptachsentransformation. Zu $r \in \mathbb{R}$ und einer quadratischen Form $q(X,Y)$ betrachten wir die Lösungsmenge

$$V(q(X,Y)-r) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; ; \; q(x,y) - r = 0 \right\}.$$

Eine solche wird **ebene Quadrik** oder Kegelschnitt (warum?) genannt. Die Gestalt einer ebenen Quadrik hängt von der Signatur der zur quadratischen Form gehörenden symmetrischen Bilinearform bzw. deren Gram'scher Matrix A und vom Vorzeichen des Werts r ab. Die eingezeichneten Achsen sind die Hauptachsen, das sind die Koordinatenachsen der ONB bezüglich derer die quadratische Form eine Linearkombination von Quadraten der Koordinaten wird.

Beispiel 7.7. Wenn A positiv definit ist (Signatur $(2,0)$) und r positiv ist, dann entsteht eine Ellipse.

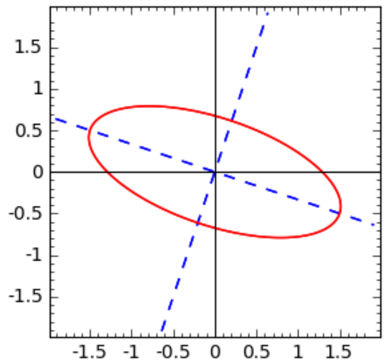

Abbildung 1. $3X^2 + 6XY + 11Y^2 = 5$

Hier ist $r = 5$ und

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

nach dem Hauptminorenkriterium positiv definit. Das charakteristische Polynom ist

$$(X-3)(X-11) - 9 = X^2 - 14X + 24 = (X-7)^2 - 25,$$

so daß die Eigenwerte 2 und 12 sind mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

In diese orthogonalen Richtungen laufen die Symmetrieachsen (Hauptachsen) der Ellipse. Die orthogonale Transformationsmatrix S bekommt man als transponierte zu

$$S^t = S^{-1} = (\text{Spalten: Basis aus normierten Eigenvektoren von } A) = 1/\sqrt{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A wird durch die Transformation mit S diagonalisiert:

$$SAS^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 12 \end{pmatrix}.$$

Es sind X,Y die Koordinatenvariablen bezüglich der Standardbasis, und U,V diejenigen bezüglich der ONB aus Eigenvektoren

$$(1/\sqrt{10} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, 1/\sqrt{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}),$$

dann gilt

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = U \cdot 1/\sqrt{10} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + V \cdot 1/\sqrt{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = S^t \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

und transponiert $(X, Y) = (U, V)S$. Die Gleichung der Quadrik $(X, Y)A(X, Y)^t = 5$ wird zu:

$$5 = (X, Y)A(X, Y)^t = (U, V)SAS^t \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = (U, V) \begin{pmatrix} 2 & \\ & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = 2U^2 + 12V^2.$$

Ganz allgemein im Fall positiv definiter Matrix A gilt: Sind λ, μ die Eigenwerte der Matrix A, dann sind $\lambda, \mu > 0$ und die rotierte Gleichung lautet

$$\lambda U^2 + \mu V^2 = r.$$

Damit haben die Halbachsen der Ellipse die Länge $\sqrt{r/\lambda}$ und $\sqrt{r/\mu}$. Für $\lambda = \mu$ entsteht ein Kreis.

Beispiel 7.8. Wenn A indefinit ist (Signatur $(1, 1)$) und $r \neq 0$, dann entsteht eine Hyperbel.

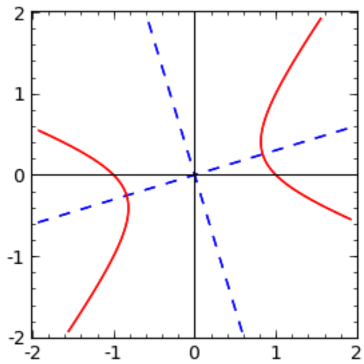

ABBILDUNG 2. $X^2 + 2XY - 2Y^2 = 1$

Hier ist $r = 1$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

nach dem Hauptminorenkriterium negativ definit. Das charakteristische Polynom ist

$$(X - 1)(X + 2) - 1 = X^2 + X - 3,$$

so daß die Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

und Eigenvektoren

$$v_+ = \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{13} \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6,606 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_- = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 + \sqrt{13} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 6.606 \end{pmatrix}$$

In diese orthogonalen Richtungen laufen die Symmetrieachsen (Hauptachsen) der Hyperbel.

Sind allgmein im negativ definiten Fall $\lambda, -\mu$ die Eigenwerte der Matrix A, dann ist oBdA $\lambda > 0 > -\mu$. Die rotierte Gleichung lautet

$$\lambda U^2 - \mu V^2 = r,$$

was sich als

$$(\sqrt{\lambda}U + \sqrt{\mu}V)(\sqrt{\lambda}U - \sqrt{\mu}V) = r$$

schreiben läßt und so als Hyperbel zu erkennen ist.

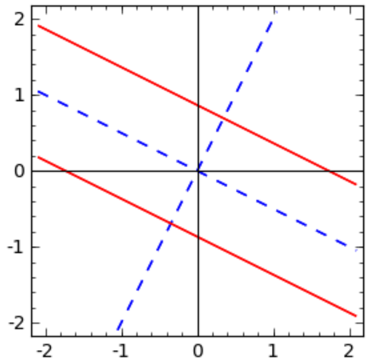

Abbildung 3. $X^2 + 4\,XY + 4\,Y^2 = 3$

Beispiel 7.9. Wenn $A \neq 0$ den Eigenwert 0 hat, also nicht invertierbar ist (Signatur $(1,0,1)$ oder $(0,1,1)$) und $r \neq 0$, dann entstehen zwei parallele Geraden.

Im konkreten Beispiel sieht man

$$3 = X^2 + 4XY + 4Y^2 = (X + 2Y)^2$$

oder eben $X + 2Y = \pm\sqrt{3}$.

In einem geeigneten rotierten Koordinatensystem mit Koordinatenvariablen U, V lautet die Gleichung der Quadrik

$$\lambda U^2 = r,$$

was die beiden durch $U = \pm\sqrt{r/\lambda}$ definierten parallelen Geraden beschreibt.

7.2. **Beweis der Hauptachsentransformation.** Wir beweisen nun das Theorem 7.1 über die Hauptachsentransformation: jede symmetrische reelle Matrix läßt sich mit einer orthogonalen Matrix diagonalisieren.

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ kommutiert mit $A^t = A$ und vermittelt durch Matrixmultiplikation daher einen normalen Endomorphismus von $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt. Das Standardskalarprodukt ist anisotrop, so daß zur Anwendung des Spektralsatzes für zerfallende normale Operatoren, Theorem 4.20 nur noch die Aussage von Korollar 7.2 fehlt. Wir haben zwar dieses Korollar aus dem Theorem der Hauptachsentransformation abgeleitet, stellen aber nun fest, daß nach der Vorarbeit aus Theorem 4.20 ebendieses Korollar 7.2 der entscheidende zu beweisende Schritt ist. Wir müssen daher für das Korollar einen alternativen Beweis finden.

Wir beginnen mit einem Beweis von Korollar 7.2, der ein wenig Analysis benutzt. In Abschnitt §7.3 nutzen wir komplexe Zahlen für einen zweiten Beweis. Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Die $(n-1)$-Sphäre

$$\mathrm{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|v\| = 1\}$$

ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt und daher nimmt die stetige Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathrm{S}^{n-1} &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle v, Av\rangle \end{aligned}$$

auf S^{n-1} sein Supremum als Maximum an. Das ist ein Fakt aus der Analysis.

Sei also v_0 normiert und für alle $w \in \mathrm{S}^{n-1}$

$$\langle v_0, Av_0\rangle \geq \langle w, Aw\rangle.$$

Wir behaupten, daß v_0 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_0 = \langle v_0, Av_0\rangle$ ist. Dazu nutzen wir aus, daß für alle $w \in \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$F_w(t) = \frac{\langle v_0 + tw, A(v_0 + tw)\rangle}{\|v_0 + tw\|^2} = f(\frac{1}{\|v_0 + tw\|}(v_0 + tw))$$

in einer Umgebung von 0 differenzierbar ist und in $t = 0$ ein Maximum hat. Die Ableitung bei $t = 0$ ist demnach

$$\begin{aligned} 0 = F_w'(0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\langle v_0, Av_0\rangle + t\big(\langle w, Av_0\rangle + \langle v_0, Aw\rangle\big) + t^2\langle w, Aw\rangle}{1 + t\big(\langle w, v_0\rangle + \langle v_0, w\rangle\big) + t^2\langle w, w\rangle} \\ &= \langle w, Av_0\rangle + \langle v_0, Aw\rangle - \langle v_0, Av_0\rangle \cdot \big(\langle w, v_0\rangle + \langle v_0, w\rangle\big). \end{aligned}$$

Hieraus wird wegen der Symmetrie von A und von $\langle -, -\rangle$ die Bedingung

$$\langle w, Av_0\rangle = \langle v_0, Av_0\rangle \cdot \langle w, v_0\rangle = \lambda_0 \cdot \langle w, v_0\rangle$$

für alle $w \in \mathbb{R}^n$, oder anders ausgedrückt

$$0 = \langle w, Av_0 - \lambda_0 v_0\rangle.$$

Da das Standardskalarprodukt nicht-ausgeartet ist, folgt

$$Av_0 - \lambda_0 v_0 = 0$$

und damit die Behauptung, daß v_0 Eigenvektor zum Eigenwert λ_0 ist. Damit ist gezeigt, daß eine relle symmetrische Matrix einen reellen Eigenwert hat.

Wie im Beweis des Spektralsatzes Theorem 4.20 gehen wir nun zum orthogonalen Komplement von v_0 über. Wir ergänzen v_0 zu einer ONB und betrachten die Matrix T, deren Spalten genau aus dieser ONB bestehen, die erste aus v_0. Dann erhalten wir wegen $Av_0 = \lambda_0 v_0$ eine Blockform

$$A' = T^{-1}AT = T^tAT = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \\ & B \end{pmatrix}$$

mit $B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ symmetrisch, denn A' ist symmetrisch:

$$A'^t = (T^tAT)^t = T^tAT = A'.$$

Per Induktion nach der Matrixgröße n schließen wir, daß das charakteristische Polynom $P_B(X)$ in Linearfaktoren zerfälllt, und daß das deshalb auch für

$$P_A(X) = P_{A'}(X) = (X - \lambda_0)P_B(X)$$

gilt. Dies beschließt den Beweis von Korollar 7.2 und damit auch den der Hauptachsentransformation Theorem 7.1.

7.3. **Beweis mittels komplexer Zahlen.** Der entscheidende Schritt im Beweis von Korollar 7.2 besteht darin zu zeigen, daß eine reelle symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ einen reellen Eigenwert hat. Der Rest von Korollar 7.2 folgt dann per Induktion nach der Dimension wie in Abschnitt §7.2. Der Trick besteht nun darin, A als komplexe Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ aufzufassen.

Theorem 7.10 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten zerfällt in $\mathbb{C}[X]$ in ein Produkt aus Linearfaktoren.*

Der Fundamentalsatz der Algebra angewandt auf das charakteristische Polynom $P_A(X)$ garantiert einen komplexen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ und $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ mit

$$Av = \lambda v.$$

Wir müssen nur noch zeigen, daß λ in Wirklichkeit aus $\mathbb{R}$ ist.

Euklidische Vektorräume haben einen engen Verwandten: die $\mathbb{C}$-Vektorräume mit positiv definiter hermitescher Form. Diese tauchen zum Beispiel als (unendlich-dimensionale) Hilberträume in der Quantenmechanik auf, sind aber auch nützlich um mit dem Satz über die Hauptachsentransformation ein eigentlich reelles Resultat zu beweisen.

Wir betrachten auf $\mathbb{C}^n$ die nur $\mathbb{R}$-lineare Bilinearform

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle := x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n.$$

Diese Bilinearform erfüllt die folgenden **sesquilinearen**[5] Eigenschaften: für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v, w \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$
$$\langle v, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle$$

Die $\mathbb{C}$-Linearität ist also in der ersten Komponente gegeben, in der zweiten Komponente wird ein Skalar allerdings komplex konjugiert[6]. Außerdem ist die Form **konjugiert symmetrisch**: für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}.$$

Eine $\mathbb{R}$-Bilinearform auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum mit den Eigenschaften *sesquilinear* und *konjugiert symmetrisch* nennt man **hermitesch**[7].

Als dritte Eigenschaft haben wir noch positive Definitheit: für alle $v = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{C}^n$ ist

$$\langle v, v \rangle = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \geq 0$$

also insbesondere aus $\mathbb{R}$ und positiv außer für $v = 0$.

Jetzt ist alles ganz einfach. Wir nehmen die Notation von oben wieder auf: $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ist symmetrisch, $\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert und $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ ein dazu passender Eigenvektor. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda\langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle &= \langle Av, v \rangle \\ &= \langle v, Av \rangle \qquad \text{(weil } A \text{ reell und symmetrisch ist)} \\ &= \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda}\langle v, v \rangle, \end{aligned}$$

insgesamt also, weil $\langle v, v \rangle > 0$ und damit $\neq 0$, folgt

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Damit ist $\lambda \in \mathbb{R}$ wie behauptet, und die komplexen Zahlen haben geholfen das rein reelle Theorem 7.1 der Hauptachsentransformation zu beweisen.

Übungsaufgaben zu §7

Übungsaufgabe 7.1. Entscheiden Sie, ob die folgenden quadratischen Formen $q(X, Y)$ zu Ellipsen oder zu Hyperbeln als Quadriken

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; ; \; q(x, y) = 1 \right\}$$

führen:

(a) $X^2 + 4\,XY + 9\,Y^2$,
(b) $3\,X^2 + 8\,XY + 2\,Y^2$,
(c) $4\,X^2 + 12\,XY + 9\,Y^2$.

Jakob Stix, Institut für Mathematik, Goethe–Universität Frankfurt, Robert-Mayer-Str. 6–8, 60325 Frankfurt am Main, Germany
E-mail address: stix@math.uni-frankfurt.de

[5] *sesqui* ist lateinisch für *anderthalb*.

[6] Man kann auch $\mathbb{C}$-linear in der zweiten und konjugiert $\mathbb{C}$-linear im ersten Argument fordern. Das spielt keine Rolle, man muß sich nur festlegen In der Physik wird in der Regel die umgekehrte Konvention verwandt.

[7] Charles Hermite, 1822–1901, französischer Mathematiker.