Blatt 1

Aufgabe 1.1 **(4 Punkte)**

Sei $V = \mathrm{M}_2(K)$ der Vektorraum der 2×2-Matrizen über einem Körper K. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} d : V \times V &\to \mathbb{R}, \\ A, B &\mapsto \det(A + B) - \det(A) - \det(B). \end{aligned}$$

Zeige, dass d eine Paarung ist und bestimme ihre Gram'sche Matrix $\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ bezüglich der Basis

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimme weiter zur Basis

$$\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

die Basiswechselmatrix $S = \mathrm{M}^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V)$ und die Gram'sche Matrix $\mathrm{M}^{\mathscr{C},\mathscr{C}} = S^t \mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}} S$.

Aufgabe 1.2 **(4 Punkte)**

Sei V ein K-Vektorraum. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : V &\to (V^*)^* \\ v &\mapsto (f \mapsto f(v)). \end{aligned}$$

Zeige, dass ι eine injektive K-lineare Abbildung ist, und dass ι für endlichdimensionales V sogar ein Isomorphismus ist.
Bestimme außerdem die adjungierten Abbildungen zur Auswertungspaarung $V^* \times V \to K$.

Aufgabe 1.3 **(4 Punkte)**

Auf den stetig differenzierbaren Funktionen

$$C^1(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ stetig differenzierbar} \}$$

sei durch

$$(f, g) := \int_0^1 f(x) g'(x) dx$$

eine Paarung $C^1(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert. Zeige, dass die konstanten Funktionen im Rechtskern, jedoch nicht im Linkskern liegen. Finde einen Unterraum $V \subset C^1(\mathbb{R})$ mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) \geq 2$, sodass gilt: Schränkt man obige Paarung auf $C^1(\mathbb{R}) \times V$ ein, dann liegen die konstanten Funktionen auch im Linkskern.

Aufgabe 1.4 **(4 Punkte)**

Finde ein Beispiel einer nichtausgearteten Paarung, die nicht perfekt ist.

Abgabe der Lösungen am nächsten Mittwoch (30. 04.)!