Prof. Dr. R. Bieri WS 2009/10

Frankfurt/M., 04.12.2009

Lineare Algebra

Serie 8[1]

Abgabetermin: Montag, 14.12.2009, 8^{15} Uhr.

1. Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ definierte lineare Abbildung $f(\underline{x}) = A\underline{x}$. Man finde eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und von $\mathbb{R}^3$, bezüglich der f durch eine Matrix der Form $M = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ beschrieben wird, bestimme die entsprechenden Basis-Transformationsmatrizen $P \in GL_4(\mathbb{R})$, $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ und vergewissere sich, dass $QAP^{-1} = M$.

2. Es seien U und V Unterräume eines Vektorraums W. Man beweise die Formel $\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim U + \dim V$.

3. Es sei $V = \mathbb{M}_2(K)$ aufgefasst als der Vektorraum über dem Körper K. Für festes $A \in \mathbb{M}_2(K)$ definiert man die Abbildung $\mathcal{D}_A : V \to V$ als $\mathcal{D}_A(X) := AX—XA$.
   (a) Zeige: $\dim(\ker \mathcal{D}_A) \geq 1$ und $\dim(im\mathcal{D}_A) \leq 3$.
   (b) Bestimme Basen von $\ker \mathcal{D}_A$ und $im\mathcal{D}_A$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. (a) Zeige: Ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ bijektiv, dann ist die zu f inverse Abbildung $f^{-1} : W \to V$ auch linear.
   (b) Im $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachte man für festes $n \in \mathbb{N}$ den Unterraum V, dessen Elemente die Polynome vom Grad $\leq n$ sind. Man finde eine Basis von V und die Matrix, die Abbildung $\frac{d}{dx} : V \to V$ (Ableitung im Sinne der Diffrenzialrechnung) bez. dieser Basis beschreibt.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/