Prof. Dr. R. Bieri WS 2009/10

Frankfurt/M., 11.01.2010

Lineare Algebra

Serie 10[1]

Abgabetermin: Montag, 18.01.2010, 8^{15} Uhr.

1. Diagonalisiere — falls dies möglich ist — die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Es sei M eine Matrix in $\mathbb{M}_n(K)$, die sich in Kästchenform $M = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $A \in \mathbb{M}_p(K)$, $B \in \mathbb{M}_q(K)$ schreiben lässt. Zeige: dann gilt für das charakteristische Polynom
$$\chi_M(X) = \chi_A(X) \cdot \chi_B(X)$$

3. Es sei p eine Primzahl und $\pi : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p$ die kanonische Projektion $\pi(a) := [a]_p$. Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$, dann sei $\pi(A) = \begin{pmatrix} \pi(a) & \pi(b) \\ \pi(c) & \pi(d) \end{pmatrix}$.
   (a) Zeige: Wenn es eine Matrix $P \in GL_2(\mathbb{Z})$ gibt, sodass $P^{-1}AP$ diagonal ist, dann ist auch $\pi(A) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_p)$ diagonalisierbar.
   (b) Finde eine Matrix $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$, die über $\mathbb{R}$ disgonalisierbar ist, ohne dass $\pi(A)$ über $\mathbb{F}_p$ diagonalisierbar ist. Geht das auch mit A diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$?

4. (a) Bestimme das charakteristische Polynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(K)$.
   (b) Benutze das Ergebnis, um eine Matrix $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{F}_3)$ zu finden, die keinen Eigenwert hat.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/