Prof. Dr. R. Bieri WS 2009/10

Frankfurt/M., 15.01.2010

Lineare Algebra

Serie 11[1]

Abgabetermin: Montag, 25.01.2010, 8^{15} Uhr.

1. Zeige, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist und suche $T \in GL_3(\mathbb{C})$ mit $T^{-1}AT =$ Diagonalmatrix.

2. Unter welchen Bedingungen an $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ist $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar ?

3. Finde eine Matrix $P \in GL_3(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass
$$P^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

4. Zeige: Wenn λ Eigenwert der Matrix $A \subset \mathbb{M}_n(K)$ ist, dann gilt für jedes Polynom $P(X) \in K[X]$ $P(\lambda)$ ist Eigenwert von $P(A)$.

5. (Zusatzaufgabe)

   (a) Zeige: Jede Permutationsmatrix A ist konjugiert zu einer Matrix der Form $M = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_e \end{pmatrix}$, wobei die A_i zyklische Permutationsmatrizen sind (d.h. A_i permutiert, Standard-Basisvektoren zyklisch).

   (b) Beschreibe das charakteristische Polynom einer beliebigen Permutationsmatrix.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/