Prof. Dr. R. Bieri WS 2009/10

Lineare Algebra

Klausur - Übungsaufgaben

1. (a) Ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$ invertierbar?

   (b) Wenn ja, bestimme man A^{-1}.

2. Gesucht sind das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ und die Eigenwerte der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(K)$$
für einen beliebigen Körper K.

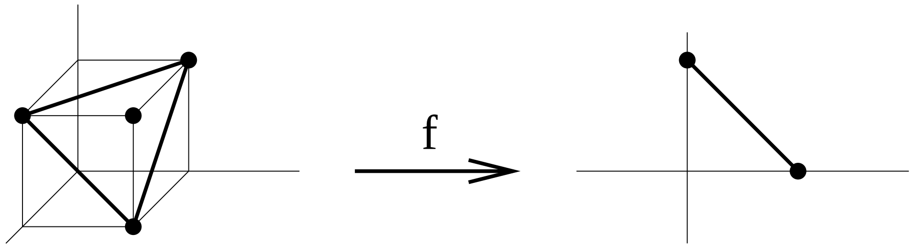
3. Zeige: Für das Produkt von zwei Matrizen $A \in \mathbb{M}_{lm}(K)$, $B \in \mathbb{M}_{mn}(K)$ gilt stets
$$\text{Rang } (AB) \leq \max \, (\text{Rang } A, \text{Rang } B).$$

4. (a) Zeige oder widerlege: Jede Matrix $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ hat einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) Hat $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{F}_2)$ in $\mathbb{F}_2$ einen Eigenwert?

5. Zeige: Jede Permutationsmatrix besitzt einen Eigenwert.

6. Zeige oder widerlege: Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die das Dreieck $\triangle$ mit Ecken $P(1,1,0)$, $Q(1,0,1)$, $R(0,1,1)$ auf die Strecke $f(\triangle) = \overline{ST}$, $S(1,0), T(0,1)$ abbildet.



7. Finde eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, deren Kern von den Spalten $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ 23 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ erzeugt wird.

8. Bestimme den Rang der Matrix $\underline{x}\ \underline{y}^t$, wenn $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{M}_{1n}(\mathbb{R})$.

9. Es sei $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ als $(4-$dimensionaler$)$ $\mathbb{R}-$Vektorraum. Die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ definiert eine Abb. $f : V \to V\ ,\ f(X) := MX$.

   (a) Zeige: f ist linear.

   (b) Bestimme die Matrix $A \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$, die f bez. der Standardbasis von V beschreibt.

10. Für gegebene $A \in \mathbb{M}_{mn}(K)$ und $\underline{b} \in K^m$ wollen wir die Aussage

$$\mathcal{A}: \quad \textit{Es gibt ein } \underline{x} \in K^n \textit{ mit } A\underline{x} = \underline{b}$$

analysieren. Ferner sei $f_A : K^n \to K^m$ die durch Linksmultiplikation mit A gegebene lineare Abbildung. Für die Aussagen $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_{10}$ beantworte man durch Ankreuzen, ob $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}_k$ oder $\mathcal{A}_k \Rightarrow \mathcal{A}$ gilt. (Keine Stimmenthaltung möglich, denn fehlende Kreuze heissen $\mathcal{A} \not\Rightarrow \mathcal{A}_k$ bzw. $\mathcal{A}_k \not\Rightarrow \mathcal{A}$.)

		$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}_k$	$\mathcal{A}_k \Rightarrow \mathcal{A}$.
$\mathcal{A}_1$	$\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} \neq \emptyset$	□	□
$\mathcal{A}_2$	$\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} = \emptyset$	□	□
$\mathcal{A}_3$	$\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} \neq K^n$	□	□
$\mathcal{A}_4$	$\mathrm{Rang} A \geq m$	□	□
$\mathcal{A}_5$	$\mathrm{Rang} A \geq n$	□	□
$\mathcal{A}_6$	*A ist invertierbar.*	□	□
$\mathcal{A}_7$	$\underline{b} \in \mathrm{im} f_A$	□	□
$\mathcal{A}_8$	*$\underline{b}$ ist im Spaltenraum von A*	□	□
$\mathcal{A}_9$	$\mathrm{Rang} A \leq \min(m, n)$	□	□
$\mathcal{A}_{10}$	*f_A ist injektiv*	□	□
$\mathcal{A}_{11}$	*f_A ist surjektiv*	□	□
$\mathcal{A}_{12}$	$n \geq m$.	□	□