

Lineare AlgebraSerie 1¹Abgabetermin: Montag, 26.10.2008, 8¹⁵ Uhr.

1. (a) Berechne alle Potenzen
- A^n, B^k
- der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ -7 & -6 & -8 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -2 \\ -25 & 11 & -5 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Finde alle
- $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$
- , für die gilt:
- $A^2 = 0$
- .

2. (a) Finde alle Matrizen
- $A \in \mathbb{M}_6(\mathbb{R})$
- , die mit der Diagonalmatrix
- $D = \text{diag}(1, 2, 2, 3, 3, 3)$
- kommutieren.

- (b) Es sei
- $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$
- eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge
- d_1, \dots, d_n
- paarweise verschieden sind. Finde alle Matrizen
- $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$
- mit
- $XD = DX$
- .

3. (a) Bestimme Elementarmatrizen
- L_1, L_2, L_3
- , sodass
- $L_1 L_2 L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
- Zeilenstufenform hat.

- (b) Bestimme die zu
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
- inverse Matrix.

¹ auch als pdf-Datei im Internet unter: <http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/>

4. Die Matrizen $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ und $\underline{b} \in \mathbb{M}_{m1}(\mathbb{R})$ seien gegeben, und wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$. (*)

Man untersuche die logischen Abhängigkeiten der folgenden Aussagen:
($(m) \Rightarrow (n)$ und $(m) \Leftrightarrow (n)$).

- (1) (*) besitzt eine Lösung in \mathbb{R}^n
- (2) (*) besitzt keine Lösung in \mathbb{R}^n
- (3) (*) besitzt genau eine Lösung in \mathbb{R}^n
- (4) $\underline{b} = \underline{0}$ oder $A = 0$
- (5) $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} = \emptyset$
- (6) $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} \neq \emptyset$
- (7) $\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} = \emptyset$
- (8) $\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} \neq \emptyset$
- (9) $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} = \mathbb{R}^n$
- (10) $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} \neq \mathbb{R}^n$
- (11) $\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} = \mathbb{R}^n$
- (12) $\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} \neq \mathbb{R}^n$
- (13) $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} = \{\underline{0}\}$
- (14) $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} \neq \{\underline{0}\}$
- (15) $\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} = \{\underline{0}\}$
- (16) $\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} \neq \{\underline{0}\}$.