

**Lineare Algebra**Serie 1<sup>1</sup>Abgabetermin: Montag, 26.10.2008, 8<sup>15</sup> Uhr.

1. (a) Berechne alle Potenzen
- $A^n, B^k$
- der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ -7 & -6 & -8 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -2 \\ -25 & 11 & -5 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Finde alle
- $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$
- , für die gilt:
- $A^2 = 0$
- .

2. (a) Finde alle Matrizen
- $A \in \mathbb{M}_6(\mathbb{R})$
- , die mit der Diagonalmatrix
- $D = \text{diag}(1, 2, 2, 3, 3, 3)$
- kommutieren.

- (b) Es sei
- $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$
- eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge
- $d_1, \dots, d_n$
- paarweise verschieden sind. Finde alle Matrizen
- $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$
- mit
- $XD = DX$
- .

3. (a) Bestimme Elementarmatrizen
- $L_1, L_2, L_3$
- , sodass
- $L_1 L_2 L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
- Zeilenstufenform hat.

- (b) Bestimme die zu
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
- inverse Matrix.

---

<sup>1</sup> auch als pdf-Datei im Internet unter: <http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/>

4. Die Matrizen  $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$  und  $\underline{b} \in \mathbb{M}_{m1}(\mathbb{R})$  seien gegeben, und wir betrachten das lineare Gleichungssystem  $A\underline{x} = \underline{b}$ . (\*)

Man untersuche die logischen Abhängigkeiten der folgenden Aussagen:  
( $(m) \Rightarrow (n)$  und  $(m) \Leftrightarrow (n)$ ).

- (1) (\*) besitzt eine Lösung in  $\mathbb{R}^n$
- (2) (\*) besitzt keine Lösung in  $\mathbb{R}^n$
- (3) (\*) besitzt genau eine Lösung in  $\mathbb{R}^n$
- (4)  $\underline{b} = \underline{0}$  oder  $A = 0$
- (5)  $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} = \emptyset$
- (6)  $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} \neq \emptyset$
- (7)  $\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} = \emptyset$
- (8)  $\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} \neq \emptyset$
- (9)  $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} = \mathbb{R}^n$
- (10)  $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} \neq \mathbb{R}^n$
- (11)  $\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} = \mathbb{R}^n$
- (12)  $\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} \neq \mathbb{R}^n$
- (13)  $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} = \{\underline{0}\}$
- (14)  $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\} \neq \{\underline{0}\}$
- (15)  $\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} = \{\underline{0}\}$
- (16)  $\{\underline{x} \mid A\underline{x} \neq \underline{b}\} \neq \{\underline{0}\}$ .