Prof. Dr. R. Bieri WS 2009/10

Frankfurt/M., 30.10.2009

Lineare Algebra

Serie 3[1]

Abgabetermin: Montag, 09.11.2009, 8^{15} Uhr.

1. Man schreibe die folgenden Permutationen als Produkte von elementfremden Zyklen:
   (a) $(1,2,3)(2,3,4)(3,4,5,6)$
   (b) $(1,2,\dots,i)(i,i+1,\dots,j)$ und $(i,i+1,\dots,j)(1,2,\dots,i)$
   (c) $\pi\circ(1,2,\dots,k)\circ\pi^{-1}$ für eine beliebige Permutation $\pi\in S_n$. $\big($ Hint: Bestimme erst Bild der Ziffern $m\in\{\pi(1),\dots,\pi(k)\}\big)$
2. Bestimme $\operatorname{sign}(\sigma)$ für alle Zyklen $\sigma=(j_1,\dots,j_k)$; wie bestimmt man $\operatorname{sign}(\pi)$ einer Permutation $\pi\in S_n$, die durch ihre Zerlegung in ein Produkt elementfremder Zyklen gegeben ist?
3. Gegeben sind Mengen X,Y,Z und Abbildungen $f:X\to Y,\ g:Y\to Z$. Beweise oder widerlege

$$\begin{array}{lcccc}
a) & g\circ f & \text{injektiv} & \Rightarrow & f \quad \text{injektiv}\\
b) & f & \text{injektiv} & \Rightarrow & gf \quad \text{injektiv}\\
c) & fg & \text{surjektiv} & \Rightarrow & g \quad \text{surjektiv}\\
d) & g & \text{surjektiv} & \Rightarrow & fg \quad \text{surjektiv.}
\end{array}$$

4. Man bestimme die Determinante der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 9\\ 3 & 7 & 10 & 3 & 17\\ 4 & 0 & 11 & 0 & 1\\ 6 & 0 & 8 & 0 & -3\\ 5 & 1 & 6 & -1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b & b\\ b & a & & & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & & a & b\\ b & b & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/