Prof. Dr. R. Bieri

WS 2009/10

Frankfurt/M., 05.11.2009

Lineare Algebra

Serie 4[1]

Abgabetermin: Montag, 16.11.2009, 8^{15} Uhr.

1. Mit der Cramerschen Regel löse man das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -2 \\ x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & -2x_2 & +6x_3 & = & -2 \end{array} \right| .$$

2. (a) Zeige: $\det \begin{pmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \ldots d_n$.

   (b) Zeige: Jede Matrix $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ kann durch elementare Zeilentransformationen in eine obere Dreiecksmatrix B mit $\det A = \det B$ überführt werden.

3. (a) Man bestimme die klassische Adjunkte $\mathrm{Adj}(A)$ einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ und verifiziere die Formel $\mathrm{Adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot E_3$.

   (b) Es sei $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ eine ganzzahlige Matrix, die eine Inverse $A^{-1} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ besitzt. Zeige: Dann ist $A^{-1} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ und es gilt: $A^{-1} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det A \in \{1, -1\}$.

4. Bestimme eine Rekursionsformel für die Determinante

$$f_n(a,b) = \det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & 0 & & \vdots \\ 0 & b & a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

   und beschreibe die Teilmenge der Koordinatenebene $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $M = \{(a,b) \mid A_4 \text{ ist nicht invertierbar}\}$ geometrisch.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/