Prof. Dr. R. Bieri WS 2009/10

Frankfurt/M., 13.11.2009

Lineare Algebra

Serie 5[1]

Abgabetermin: Montag, 23.11.2009, 8^{15} Uhr.

1. Es sei M eine Menge und $G = \{A \mid A \subseteq M\}$ die Menge aller Teilmengen von M. Auf G sind 3 Verknüpfungen definiert: $A, B \in G$
$A \cup B$ Vereinigung, $A \cap B$ Schnitt, $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ symmetrische Differenz.
Welche unter $(G, \cap)$, $(G, \cup)$, $(G, \triangle)$ sind Gruppen ?

2. Die Gruppentafel einer endlichen Gruppe G ist ein quadratisches Schema, das alle Produkte der oben und links aufgelisteten Elemente von G angibt.

	e	a	b	…
e	e	a	b	…
a	a	a^2	ab	…
b	b	ba	b^2	…
⋮	⋮	⋮	⋮	

   (a) Zeige: In der Gruppentafel steht in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element von G genau einmal.

   (b) Finde die Gruppentafeln der Gruppen mit $2, 3, 4$ Elementen.

3. Zeige: Jede Matrix $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ mit $\det A = \pm 1$ ist Produkt von Matrizen mit Einträgen in $\{0, 1, -1\}$.

4. Es sei $(K, +, \bullet)$ eine Menge mit zwei Verknüpfungen, für die gilt (I) $(K, +)$ ist eine Abelsche Gruppe, (II) $(K \setminus \{0\}, \bullet)$ ist eine Abelsche Gruppe und (III) $a(b + c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in K$. Zeige: Aus (I), (II), (III) folgt **nicht**, dass $(K, +, \bullet)$ ein Körper ist. [Hint: Versuche $(\mathbb{R}, +)$ mit einer Multiplikation auszustatten, die nur auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die gewöhnliche ist.]

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/