Prof. Dr. R. Bieri WS 2009/10

Frankfurt/M., 27.11.2009

Lineare Algebra

Serie 7[1]

Abgabetermin: Montag, 07.12.2009, 8^{15} Uhr.

1. Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ betrachte man die Unterräume $U = \{\underline{a} \mid a_2 + a_3 + a_4 = 0\}$, $W = \{\underline{a} \mid a_1 + a_2 = 0,\ a_3 = 2a_4\}$. Suche eine Basis von $U \cap W$ und ergänze sie zu je einer Basis von U und W.

2. (a) Es sei K ein endlicher Körper mit $k \in \mathbb{N}$ Elementen. Wieviele Basen gibt es im Vektorraum $V = K^n$?

   (b) Finde alle 3−elementigen Teilmengen $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{F}_2^3$ mit der Eigenschaft, dass (v_1, v_2, v_3) eine Basis von $\mathbb{F}_2^3$ über $\mathbb{F}_2$ ist.

3. (a) Zeige: Wenn $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist und $0 < a \in K$, dann ist $K(\sqrt{a}) := \{x + y\sqrt{a} \mid x, y \in K\}$ auch ein Körper.

   (b) Finde eine Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

4. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

   (a) Sind $v_1, v_2, v_3 \in V$ und alle Paare $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_3)$ linear unabhängig, dann ist auch (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig.

   (b) Für $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ und $w_j = \sum\limits_{i=1}^{j} v_i \quad (1 \leq j \leq n)$ gilt:
   $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $(w_1, \ldots, w_n)$ linear unabhängig.

5. ***(Freiwillige Herausforderung)*** Für die Körper $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{F}_p$ zeige man, dass für die klassische Adjunkte von $A \in \mathbb{M}_n(K)$ gilt $\mathrm{Adj}(\mathrm{Adj}A) = (\det A)^{n-2}A$.
   (**Hint.** Erst für invertierbares A, dann mit einem Stetigkeitsargument für alle A über $\mathbb{R}$, schließlich via $\mathbb{Z}$ für alle A über $\mathbb{F}_p$).

---

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/