BIERI WS 08/09

# Elementarmathematik I

## Serie 12

1. Man beweise: Hat das normierte ganzzahlige Polynom $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ eine Nullstelle $\alpha$ in $\mathbb{Q}$, dann ist sogar $\alpha \in \mathbb{Z}$.

2. Das Polynom $X^8 - 1$ soll in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ und $\mathbb{Z}_2[X]$ in ein Produkt von irreduziblen zerlegt werden

3. Die Polynome $f(X) = X^2 + 2$ und $g(X) = (X+1)^2$ definieren Abbildungen $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Man skizziere den Verlauf d des Bildpunktes $f(z)$ (bzw $g(z)$), wenn $z$ die Kreise $K_R = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = R \}$, $R = \frac{1}{2}, 1, 2$ durchläuft. (Interessieren soll vor allem der grobe Verlauf und wie oft der Nullpunkt umrundet wird). [Hint: bestimme $f(z)$ bzw $g(z)$ für die 8 Punkte $z = R(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4})$, $k = 0, 1, \dots, 7$. – am einfachsten mit der geometrischen Interpretation!].

4. Es sei $f(X) = \frac{i}{10}X^4 + X - 5 \in \mathbb{C}[X]$. Die Seite http://geosoft.ch/geo/abb.html berechnet die Abbildung $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf Kreisen $K_R$ mit variablem $R$. Ist $R$ sehr klein, dann ist $f(K_R)$ nahe bei $-5$. Ist $R$ sehr gross, wird $f(K_R)$ den Nullpunkt 4 mal umrunden. Dazwischen findet man $R_1, R_2, R_3, R_4$ mit $0 \in f(K_{R_i})$. Man kann nun näherungsweise die 4 Nullstellen $z_i \in K_{R_i}$ von $f(X)$ ablesen.

Abgabe 2.2.2009, $8^{15}$