GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Monte Carlo Methoden
SS 2014
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 3

Abgabe bis Mittwoch, 28.5.

Aufgabe 3: [Stochastik]

(a) Konstruieren Sie zwei Zufallsvariablen, die unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

(b) Für Zufallsvariablen $X, Y \in L^2$ sowie $a, b \in \mathbb{R}$ sei

$$\hat{Y}_{a,b} = a + bX,$$

und es gelte $\sigma(X) > 0$ sowie $\sigma(Y) > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \mathrm{E}\left(Y - \hat{Y}_{a,b}\right)^2 = \mathrm{E}\left(Y - \hat{Y}_{a^*,b^*}\right)^2 = \sigma^2(Y) \cdot \left(1 - \rho^2(X,Y)\right)$$

mit

$$a^* = \mathrm{E}(Y) - b^*\mathrm{E}(X), \quad b^* = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma^2(X)}$$

gilt.

Aufgabe 4: [Ruinproblem]

Das klassische Ruinproblem basiert auf einer unabhängigen Folge von Zufallsvariablen V_t, die jeweils die Verteilung

$$P(\{V_t = 1\}) = p, \quad P(\{V_t = -1\}) = 1 - p$$

mit $p \in \,]0,1[\,$ besitzen und angeben, ob ein Spieler in Runde t gewinnt oder verliert. Setzt der Spieler pro Runde den Einsatz eins und bezeichnet $n \in \mathbb{N}$ sein Startkapital, so ist

$$X_t = x + \sum_{s=1}^{t} V_s$$

sein Kapital nach t Runden. Wenn $z \in \mathbb{N}$ mit $z > x$ das angestrebte Zeil des Spielers ist, so lässt sich das Spielende durch die Eintrittszeit

$$T = \inf\{t \in \mathbb{N} | X_t \in \{0, z\}\}$$

definieren.

Für $t, x \in \mathbb{N}$ sei $f(x,t) = P(\{T \leq t\} \cap \{X_T = z\})$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler mit Startkapital x bis zur Zeit t sein Zielkapital z erreicht hat.

(a) Beweisen Sie für $t \geq 2$ die Rekursionsformel

$$f(x,t) = p \cdot f(x+1, t-1) + (1-p) \cdot f(x-1, t-1).$$

(b) Entwickeln und implentieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung und graphischen Darstellung der Funktion $x \to f(x,t)$.

Aufgabe 5: [Kasino]

Ein Kasino bietet folgendes Roulette-Spiel an: In jeder Spielrunde erhalten Sie mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{18}{37}$ den verdoppelten Einsatz oder verlieren mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ Ihren Einsatz.
Ihr Startkapital beträgt x Euro und Ihre Strategie sieht wie folgt aus:

- Ihr Starteinsatz beträgt 1 Euro,
- verlieren Sie, so verdoppeln Sie Ihren Einsatz; wenn Sie nicht mehr verdoppeln können, setzen Sie ihr gesamtes restliches Vermögen ein,
- gewinnen Sie, so starten sie wieder mit einem Einsatz von 1 Euro.
- Das Spiel endet, wenn Sie kein Geld mehr haben oder bei z Euro angekommen sind.

Schreiben Sie ein Programm in einer Programmiersprache Ihrer Wahl, welches für Inputparameter Startkapital x, Abbruchkapital z und Simulationsanzahl n dieses Spiel n Mal simuliert und am Ende die geschätzte Gewinnwahrscheinlichkeit $\hat{p} = \frac{\#\text{erfolgreiche Spiele}}{n}$ ausgibt.

Testen Sie das Programm für $x = 100$, $z = 200$ und $n \in \{100, 100000\}$.

Was folgern Sie daraus für Ihre Spielstrategie?

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte