GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Hierarchische Numerische Verfahren
SS 2014
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 2

Abgabe bis Donnerstag, 22.05.2014

Aufgabe 1:

Gegeben die Poisson-Differentialgleichung $-\Delta u = f$ in $[0,1]$, sei $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ eine Basis des Finite-Elemente-Raumes mit span $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\} \subset H_0^1([0,1])$. Bestimmen sie für die Basisfunktionen $\phi_i(x) = \sin(2\pi i x)$, $i = 1, \ldots, N$ die zugehörige Steifigkeitsmatrix.

Aufgabe 2:

Wir betrachten die Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet sei.

(a) Zeigen sie, dass jede Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ der Laplace-Gleichung auch die schwache Form

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx \;=\; 0 \text{ für alle } v \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$$

erfüllt.

(b) Umgekehrt kann man auch folgern, dass jede Lösung $u \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$ der schwachen Form auch eine Lösung der Laplace-Gleichung ist. Zeigen sie dies für den Fall $\Omega \subset \mathbb{R}$.

(c) Wir betrachten nun das Funktional (Dirichlet-Integral)

$$I(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx$$

und die dazugehörige Variationsaufgabe

$$\min_{u \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)} I(u).$$

Zeigen sie, dass jede Lösung der schwachen Form auch eine Lösung der Variationsaufgabe ist und umgekehrt, dass jede Lösung $u \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ der Variationsaufgabe auch eine Lösung der schwachen Form ist.