GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Monte Carlo Methoden
SS 2014
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 4

Abgabe bis Mittwoch, 11.6.

Aufgabe 6: [Inversionsmethode]

Entwerfen und implementieren Sie einen Algorithmus zur Simulation der Arkussinus-Verteilung, die durch die Dichte

$$h(x) = \begin{cases} 1/\pi \cdot (x \cdot (1-x))^{-1/2}, & \text{falls } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 7: [Verwerfungsmethode]

(a) Entwickeln, implentieren und testen Sie einen Algorithmus zur Simulation der Gleichverteilung auf dem Simplex

$$S = \left\{ x \in [0,1]^d \mid \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1 \right\},$$

der auf der Verwerfungsmethode basiert.

(b) Untersuchen Sie die Kosten Ihres Algorithmus aus a) in Abhängigkeit von der Dimension d. Berechnen Sie dazu die Akzeptanzwahrscheinlichkeit.

Aufgabe 8: [Verwerfungsmethode]

Beschreiben Sie die Verwerfungsmethode zur Erzeugung von Zufallsvariablen mit der Dichtefunktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{3}{4}(1+x)(1-x), & -1 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Verwenden Sie als approximative Dichte auf dem Intervall $[-1, 1]$

$$g(x) = 1 - |x|.$$

(a) Finden Sie das minimale $c \in \mathbb{R}$ für das gilt: $cg(x) \geq f(x)$.

(b) Geben Sie die Akzeptanzwahrscheinlichkeit an.

(c) Geben Sie eine Methode zur Erzeugung von Zufallszahlen mit der Dichte g an.

Aufgabe 9: [Polar-Marsaglia Methode]

Sei (X_1, X_2) gleichverteilt auf der euklidischen Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ und $S = X_1^2 + X_2^2$. Zeigen Sie, dass der durch

$$Z_i = X_i \sqrt{(-2 \ln S)/S}$$

definierte Zufallsvektor (Z_1, Z_2) standard-normalverteilt ist.

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte