GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Hierarchische Numerische Verfahren
SS 2014
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 4

Abgabe bis Donnerstag, 3.7.

Aufgabe 1: [Dreieckelemente]

Auf dem Referenzdreieck mit Eckpunkten $x_1 = (0,0), x_2 = (1,0)$ und $x_3 = (0,1)$ sind die linearen Ansatzfunktionen $\varphi_1(\xi,\eta) = \xi, \varphi_2(\xi,\eta) = \eta$ und $\varphi_3(\xi,\eta) = 1-\xi-\eta$ definiert. Durch eine affin lineare Transformation

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

wird der Punkt $(x,y)^T$ eines beliebigen Dreiecks auf den entsprechenden Punkt $(\xi,\eta)^T$ des Referenzdreiecks abgebildet. Berechnen Sie die Koeffizienten der Matrix A und des Vektors b, wenn die drei Eckpunkte r, s, t eines Dreiecks in globalen Koordinaten gegeben sind.

Punkte: $\boxed{5}$

Aufgabe 2: [Finite Elemente in 2D]

Wir betrachten die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{in } \Omega = [0,1]^2 \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die exakte Lösung dieses Problems gegeben ist durch

$$u(x,y) = \frac{1-x^2}{2} - \frac{16}{\pi^3} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ ungerade}}} \left[\frac{\sin(k\pi(1+x)/2)}{k^3 \sinh(k\pi)} \left(\sinh\left(\frac{k\pi(1+y)}{2}\right) + \sinh\left(\frac{k\pi(1-y)}{2}\right)\right)\right].$$

Das Gebiet Ω werde nun durch ein äquidistantes Gitter $(x_i, y_j) = (h\cdot i, h\cdot j)$ für $i,j = 0,\ldots,N$ mit Maschenweiter $h = 1/N$ in beiden Richtungen diskretisiert. Auf diesem Gitter werden durch Diagonal Halbierung jedes Teilgitters sückweise lineare Finite-Dreieckelemente definiert.

(b) Geben Sie die Basisfunktionen $\varphi_{ij}(x,y)$ der Finite-Dreieckelemente explizit an.

(c) Ermitteln Sie die lokale Steifigkeitsmatrix.

(d) Berechnen Sie analytisch die Eigenwerte der globale Steifigkeitsmatrix A für $N = 8$, anschließend berechnen Sie numerisch den kleinsten und größten Eigenwert mit der *Potenzmethode nach von-Mises.*

(e) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $N = 64$ mit den Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren und vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit der Verfahren bis auf eine Fehlerschranke von $\varepsilon = 10^{-5}$.

Punkte: $\boxed{10}$

Gesamtpunktzahl: 15 Punkte