Blatt 3

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Sei $(\ ,\ )$ eine symmetrische Bilinearform auf dem K-Vektorraum V und seien U, W Unterräume von V. Zeige:

(a) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$,

(b) Aus $U \subseteq W$ folgt $W^\perp \subseteq U^\perp$,

(c) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$,

(d) $U^\perp + W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp$. Finde ein Beispiel mit $U^\perp + W^\perp \neq (U \cap W)^\perp$.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Zeige, dass über Körpern mit $2 = 0$ die symmetrische Bilinearform auf K^2 zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

keine Orthogonalbasis besitzt.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Sei

$$P_n := \{f \in \mathbb{Q}[X] : \deg(f) \leq n\}$$

der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens n. Finde für alle $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ jeweils eine Orthogonalbasis für die symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} (\ ,\ ) : P_n \times P_n &\to \mathbb{Q} \\ f, g &\mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)

Transformiere mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren die jeweils gegebene Basis $\mathscr{C}$ in eine Orthogonalbasis zur jeweils gegebenen symmetrischen Bilinearform. Zeige bei (b) zunächst, dass die Form anisotrop ist!

(a) $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad x, y \mapsto x^t y; \quad \mathscr{C} = \left((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t, (0,1,0,0)^t, (0,0,1,0)^t, (0,0,0,1)^t \right)$

(b) $(\ ,\ ) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x, y \mapsto x^t A y; \quad \mathscr{C} = ((0,1,1)^t, (1,0,1)^t, (1,1,0)^t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Abgabe der Lösungen am nächsten Mittwoch (28. 05.)!