Blatt 4

Aufgabe 4.1 **(4 Punkte)**

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein K-Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform, und seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass W genau dann ein orthogonales Komplement von U in V bezüglich $(\ ,\ )$ ist, wenn gilt: V ist die innere direkte Summe von U und W (d.h. $U + W = V$ und $U \cap W = \{0\}$) und es gilt $(\ ,\ )|_{U\times W} = 0$.

Sei nun $V = M_n(K)$ und $(A, B) := \mathrm{Spur}(AB)$. Finde für die folgenden beiden Untervektorräume jeweils ein orthogonales Komplement:

(a) $U_1 := \{(d_{ij})_{i,j} \in V : d_{ij} = 0 \text{ falls } i \neq j\}$,

(b) $U_2 := \{\lambda E_n : \lambda \in K\}$. *(Dabei bezeichnet E_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix.)*

Aufgabe 4.2 **(4 Punkte)**

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen Bilinearform und $\mathscr{B}$ eine beliebige Basis von V. Beweise die folgenden beiden Bemerkungen aus der Vorlesung:

(a) $\mathscr{B} = (\mathscr{B}^*)^*$.

(b) Der Isomorphismus $V \to V^*$, $v \mapsto (v, -)$ transportiert die duale Basis $\mathscr{B}^*$ von V im Sinne von Lemma-Definition 4.1 in die duale Basis von V^* gemäß Satz-Definition 1.17.

Aufgabe 4.3 **(4 Punkte)**

Seien K ein Körper, $a_1, ..., a_n \in K$ und $f : K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass f bezüglich des Standardskalarprodukts normal ist.

Aufgabe 4.4 **(4 Punkte)**

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen Bilinearform, $f : V \to V$ ein Endomorphismus und $P(X) \in K[X]$ ein Polynom. Zeige:

(a) $P(f)^* = P(f^*)$.

(b) Falls f normal ist, dann ist auch $P(f) : V \to V$ normal.

Hinweis: Für $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in K[X]$ und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ ist $P(f) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f^k \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ mit

$$f^k := \begin{cases} f \circ ... \circ f \text{ (}k\text{-mal)} & \text{falls } k \geq 1, \\ \mathrm{id}_V & \text{falls } k = 0 \end{cases}$$

und punktweiser Addition/Skalarmultiplikation.

Abgabe der Lösungen am nächsten Mittwoch (11. 06.)!