Blatt 5

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{Q}^4$ und sei $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die Standardbasis von V. Betrachte zu den beiden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{Q}) \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{Q})$$

die symmetrische Bilinearform $(\ ,\ )_A : V \times V \to \mathbb{Q}$, $(x, y)_A := x^t A y$ sowie den Endomorphismus $f : V \to V$, $f(x) := Bx$.

(a) Finde die zu $\mathscr{B}$ duale Basis $\mathscr{B}^*$ bezüglich $(\ ,\ )_A$.

(b) Bestimme die Darstellungsmatrix von f^* bezüglich der Basis $\mathscr{B}$.

(c) Bestimme die die Eigenräume $V_\lambda(f)$ und $V_\lambda(f^*)$ und verifiziere insbesondere $V_\lambda(f) \neq V_\lambda(f^*)$ für ein λ. Warum ist dies kein Widerspruch zu der Proposition aus der Vorlesung, die den Eigenraum $V_\lambda(f)$ mit $V_\lambda(f^*)$ vergleicht?

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

Sei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Beweise oder widerlege:

(a) Die Zeilen einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bilden genau dann eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ ergeben.

(b) Die Zeilen einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bilden genau dann eine Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$, wenn die Spalten von A eine Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ ergeben.

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)

(a) Bestimme die Signatur der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

(b) Welche der reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1954 & -1 & 2 \\ -1 & 1974 & -3 \\ 2 & -3 & 1990 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -9 \\ -4 & -9 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1954 & 2 & 1 \\ 2 & -1974 & 3 \\ 1 & 3 & -1990 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind positiv definit/negativ definit/positiv semidefinit/negativ semidefinit/nichts von alledem?

Aufgabe 5.4 (4 Punkte)

Sei U ein Unterraum eines euklidischen Raums V. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $p : V \to V$, so dass $p(V) = U$ und für alle $u \in U$ gilt $p(u) = u$ und für alle $v \in V$ gilt $v - p(v) \in U^\perp$.

(b) Sei $r = \dim(U)$ und $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine ONB von V, die so gewählt ist, dass U die lineare Hülle von $b_1, \ldots, b_r$ ist. Dann hat für alle $v \in V$ die Abbildung aus (a) die Form

$$p(v) = \sum_{i=1}^{r} (v, b_i) b_i.$$

(c) Für alle $v \in V$ gilt

$$\|p(v)\| \leq \|v\|.$$

(d) Für alle $v \in V$ ist $p(v)$ der Punkt in U mit minimalem Abstand zu v, d.h. für alle $u \in U$ gilt

$$\|v - p(v)\| \leq \|v - u\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $u = p(v)$ gilt.

Abgabe der Lösungen am nächsten Mittwoch (25. 06.)!