Blatt 6

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $H \subseteq V$ eine Hyperebene (d.h. ein Unterraum von V mit $\dim(H) = \dim(V) - 1$). Eine *Spiegelung* von V an H ist eine Isometrie $\sigma : V \to V$ mit $\sigma|_H = \mathrm{id}_H$ und $\sigma(v) = -v$ für alle $v \in H^\perp$. H heißt dann Spiegelungsebene von σ.

(a) Welche Eigenwerte hat eine Spiegelung und mit welchen Vielfachheiten treten diese auf?

(b) Sei σ eine Spiegelung an H und $v \in H^\perp \setminus \{0\}$. Zeige, dass σ durch die Gleichung $\sigma(w) = w - \frac{2\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle} v$ für alle $w \in V$ gegeben ist.

(c) Zeige, dass
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
eine Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet) beschreibt und bestimme die Spiegelungsebene.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet. Eine *Drehung* des $\mathbb{R}^3$ ist eine Isometrie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, so dass gilt: Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $f(v) = v$ und für $E = \langle v\rangle^\perp$ ist $f(E) = E$ und $f|_E : E \to E$ eine Drehung.

Zeige, dass jede Matrix $A \in \mathrm{SO}(3)$ eine Drehung beschreibt und dass für den Drehwinkel φ gilt:
$$\cos(\varphi) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{Spur}(A) - 1).$$

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Wir definieren
$$K := \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \quad A := \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : d_1, d_2 > 0 \right\}, \quad N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$
Zeige, dass die Abbildung
$$\psi : K \times A \times N \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \quad k, a, n \mapsto kan$$
bijektiv ist.

Tipp: Für die Surjektivität erinnere man sich an die geometrische Bedeutung der Elemente aus K und N und versuche, für beliebige $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ das Bild (ge_1, ge_2) der Standardbasis (e_1, e_2) sukzessive zurückzutransformieren.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)

Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Wir definieren zu jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ die lineare Abbildung
$$f^\vee : W^* \to V^*, \quad \psi \mapsto \psi \circ f.$$
Zeige:

(a) ${}^\vee : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$, $f \mapsto f^\vee$ ist linear.

(b) Wenn f surjektiv ist, dann ist $f^\vee$ injektiv.

(c) Wenn f injektiv ist, dann ist $f^\vee$ surjektiv.

(d) Sind V und W endlichdimensional, $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ Basen von V bzw. W und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, dann gilt für die Darstellungsmatrizen
$$\mathrm{M}^{\mathscr{C}^*}_{\mathscr{B}^*}(f^\vee) = \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f)^t.$$

Abgabe der Lösungen am nächsten Mittwoch (9. 07.)!