Lösung Blatt 6

Aufgabe 6.1

(a) Sei $\dim(V) = n$ und σ eine Spiegelung an H. Wegen $\dim(H) = n-1$ ist $\dim(H^\perp) = 1$ und $H^\perp = \langle v \rangle$. Sei $(v_1, ..., v_{n-1})$ eine Basis von H. Dann ist $\mathscr{B} := (v_1, ..., v_{n-1}, v)$ wegen $V = H \oplus H^\perp$ eine Basis von V und nach Definition von 'Spiegelung' ist

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Dabei bezeichne E_{n-1} die $(n-1) \times (n-1)$-Einheitsmatrix und 0 den jeweils passenden Nullvektor). Insbesondere besitzt σ genau die Eigenwerte 1 (mit geom. und alg. Vielfachheit $n-1$) und -1 (mit geom. und alg. Vielfachheit 1).

(b) Für $v \in H^\perp \setminus \{0\}$ lässt sich wegen $V = H \oplus H^\perp$ jedes $w \in V$ eindeutig schreiben als $w = h + \lambda v$ mit $h \in H$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt wegen $H \perp H^\perp$

$$w - \tfrac{2\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle} v = w - \tfrac{2\langle v,h+\lambda v\rangle}{\langle v,v\rangle} v = w - \tfrac{2\langle v,h\rangle}{\langle v,v\rangle} v - \tfrac{2\lambda\langle v,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v = w - 2\lambda v = h - \lambda v = \sigma(h) + \lambda\sigma(v) = \sigma(w).$$

(c) Sei f die durch Linksmultiplikation mit A definierte lineare Abbildung. Das charakteristische Polynom von f ist

$$P_f(X) = P_A(X) = \det(A - X) = (\tfrac{1}{3} - X)^3 - 2 \cdot \tfrac{8}{27} - 3 \cdot \tfrac{4}{9}(\tfrac{1}{3} - X) = -X^3 + X^2 + X - 1 = -(X-1)^2(X+1).$$

A hat also genau die Eigenwerte 1 und -1. Lösen der Gleichungssysteme $Ax = x$ und $Ax = -x$ ergibt die Eigenräume

$$V_1(f) = \langle (1,-1,0)^t, (1,2,-3)^t \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad V_{-1}(f) = \langle (1,1,1)^t \rangle_{\mathbb{R}},$$

Nach Definition der Eigenräume gilt $f|_{V_1(f)} = \mathrm{id}_{V_1(f)}$ und $f|_{V_{-1}(f)} = -\mathrm{id}_{V_{-1}(f)}$ wie in der Definition von 'Spiegelung'. Wegen

$$\langle (1,-1,0)^t, (1,1,1)^t \rangle = 1 - 1 + 0 = 0, \quad \langle (1,2,-3)^t, (1,1,1)^t \rangle = 1 + 2 - 3 = 0$$

gilt $V_1(f) \perp V_{-1}(f)$ und wegen $\mathbb{R}^3 = V_1(f) \oplus V_{-1}(f)$ schließlich auch $V_1(f)^\perp = V_{-1}(f)$. Also ist f eine Spiegelung mit Spiegelungsebene $H = V_1(f)$.

Aufgabe 6.2

Sei $A \in \mathrm{SO}(3)$ und f die durch Linksmultiplikation mit A definierte lineare Abbildung. Wegen $\det(A^t) = \det(A) = 1$, $A^t A = E_3$ und der Multiplikativität der Determinantenabbildung ist

$$\begin{aligned} \det(A - E_3) &= \det(A^t)\det(A - E) = \det(A^t(A - E_3)) = \det(E_3 - A^t) = \det((E_3 - A)^t) \\ &= \det(E_3 - A) = \det(-E_3)\det(A - E_3) = (-1)^3 \det(A - E_3) = -\det(A - E_3) \end{aligned}$$

und es folgt $\det(A - E_3) = 0$. Also besitzt A den Eigenwert 1. Sei $v_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert 1, d.h. $f(v_1) = v_1$ und $||v_1|| = 1$. Wir definieren $E := \langle v_1 \rangle^\perp$. Wir wählen eine Basis (v_2, v_3) von E mit normierten, zueinander orthogonalen Vektoren v_2, v_3. Dann ist $\mathscr{B} := (v_1, v_2, v_3)$ eine ONB von V und die Matrix P des Basiswechsels von der Standardbasis zu $\mathscr{B}$ liegt in $\mathrm{O}(3)$. Bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ wird f beschrieben durch die Matrix

$$A' = P^{-1}AP.$$

und hat wegen $f(v_1) = v_1$ die Form

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Wegen $A, P \in \mathrm{O}(3)$ ist auch $A' \in \mathrm{O}(3)$ und wegen $\det(A') = \det(A) = 1$ sogar $A' \in \mathrm{SO}(3)$. Aus der Spaltenorthogonalität folgt dann

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

und wegen der Spaltenorthonormalität liegt die (2×2)-Matrix unten rechts in SO(2). Damit hat A' die Form

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für ein $\varphi \in [0, 2\pi)$. Insbesondere gilt $f(E) = E$ und bezüglich der Basis (v_2, v_3) von E wird $f|_E$ durch

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

beschrieben, d.h. $f|_E : E \to E$ ist eine Drehung.

Da die Spurabbildung konjugationsinvariant ist, gilt

$$\operatorname{Spur}(A) = \operatorname{Spur}(A') = 1 + 2\cos(\varphi)$$

und umgestellt

$$\cos(\varphi) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{Spur(A)} - 1).$$

Aufgabe 6.3

Wir führen zunächst folgende Notation ein: Für alle $\varphi, \lambda \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}_{>0}$ sei

$$D_\varphi := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad S_r := \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}, \quad T_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen zuerst die Surjektivität. Sei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ beliebig. Mit der Standardbasis (e_1, e_2) des $\mathbb{R}^2$ ist dann (Me_1, Me_2) ebenfalls eine Basis. Für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ bewirkt die Linksmultiplikation mit D_φ eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung mit Drehwinkel φ. Sei $\theta \in [0, 2\pi)$ der Winkel zwischen der positiven x-Achse und Me_1. Dann liegt $D_{-\theta}Me_1$ auf der positiven x-Achse, also $D_{-\theta}Me_1 = re_1$ mit $r > 0$. Linksmultiplikation mit $S_{\frac{1}{r}}$ ergibt

$$S_{\frac{1}{r}} D_{-\theta} M e_1 = e_1.$$

Die letzte Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $S_{\frac{1}{r}} D_{-\theta} M$ von der Form $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ ist. Mit $\det S_{\frac{1}{r}} D_{-\theta} M = 1$ ergibt dies $S_{\frac{1}{r}} D_{-\theta} M = T_x$ für ein $x \in \mathbb{R}$ und umgestellt

$$M = D_{-\theta}^{-1} S_{\frac{1}{r}}^{-1} T_x = D_\theta S_r T_x = \psi(D_\theta, S_r, T_x).$$

Nun zur Injektivität: Sei $M = D_\theta S_r T_x$ mit $\theta \in [0, 2\pi), r > 0, x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & xr\cos(\varphi) - \frac{1}{r}\sin(\varphi) \\ r\sin(\varphi) & xr\sin(\varphi) + \frac{1}{r}\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

- Es gilt $a^2 + c^2 = r^2$, also ist $r = +\sqrt{a^2 + c^2}$ eindeutig durch M bestimmt.
- Komponentenvergleich der linken Spalte ergibt $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$ und $\sin(\varphi) = \frac{c}{r}$. Der Wert $\varphi \in [0, 2\pi)$ ist durch diese zwei Gleichungen ebenfalls eindeutig bestimmt. (*Wer's nicht glaubt: Für $x, y \in [0, 2\pi)$ mit $x < y$ ist $\cos(x) = \cos(y) \iff x \in [0, \pi) \wedge y = 2\pi - x$ und $\sin(x) = \sin(y) \iff (x \in [0, \frac{\pi}{2}) \wedge y = \pi - x) \vee (x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}) \wedge y = 3\pi - x)$, was nicht simultan erfüllt werden kann*).
- Wegen $\det(A) \neq 0$ ist $a \neq 0$ oder $c \neq 0$ und wir können nach Einsetzen von $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$ und $\sin(\varphi) = \frac{c}{r}$ in die zweite Spalte wenigstens eine der beiden Gleichungen eindeutig nach x auflösen (*Wer's genau wissen will: In beiden Fällen erhält man nach Ausnutzen von $a^2 + c^2 = r^2$ und $ad - bc = 1$ jeweils $x = \frac{ab+cd}{a^2+c^2}$*).

Wir haben also gezeigt, dass das Tripel $(D_\theta, S_r, T_x) \in K \times A \times N$ eindeutig durch $M = \psi(D_\theta, S_r, T_x)$ bestimmt ist, was die Injektivität beweist.

Aufgabe 6.4

(a) Für alle $\alpha, \beta \in K$, $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $\psi \in W^*$ gilt

$$(\alpha f + \beta g)^\vee(\psi) = \psi \circ (\alpha f + \beta g) = \alpha(\psi \circ f) + \beta(\psi \circ g) = \alpha f^\vee(\psi) + \beta g^\vee(\psi),$$

also $(\alpha f + \beta g)^\vee = \alpha f^\vee + \beta g^\vee$ und damit ist $^\vee$ linear.

(b) Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ surjektiv und sei $\psi \in W^*$ mit $f^\vee(\psi) = 0$ ($0 \in V^*$ ist natürlich die Nullabbildung). Sei nun $w \in W$ beliebig. Da f surjektiv ist, gibt es $v \in V$ mit $f(v) = w$ und damit $\psi(w) = \psi(f(v)) = f^\vee(\psi)(v) = 0$, also $\psi = 0 \in W^*$. Damit ist $\ker(^\vee) = \{0\}$ und $^\vee$ injektiv.

(c) Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ injektiv und $\mathscr{B}$ eine Basis von V. Da f injektiv ist, ist $f(\mathscr{B})$ in W linear unabhängig und wir können $f(\mathscr{B})$ zu einer Basis $\mathscr{C} = f(\mathscr{B}) \cup \mathscr{B}'$ von W ergänzen. Sei nun $\phi \in V^*$ beliebig. Wir definieren $\psi \in W^*$ als die durch

$$\psi(c) = \begin{cases} \phi(f(b)) & \text{falls } c = f(b) \text{ für ein } b \in \mathscr{B} \\ 0 & \text{falls } c \in \mathscr{B}' \end{cases}$$

eindeutig bestimmte lineare Abbildung. Dann gilt für alle $v \in V$

$$f^\vee(\psi)(v) = \psi(f(v)) = \phi(v),$$

da dies nach Definition für alle $v \in \mathscr{B}$ gilt und wir erhalten $f^\vee(\psi) = \phi$. Also ist $f^\vee$ surjektiv.

(d) Sei $\mathscr{B} = (b_1, ..., b_n)$ und $\mathscr{C} = (c_1, ..., c_m)$. Dann ist $\mathrm{M}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) = (\alpha_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ mit $f(b_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} c_i$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$. Für die duale Basis C^* gilt dann

$$f^\vee(c_j^*)(b_k) = c_j^*(f(b_k)) = c_j^*(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} c_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} c_j^*(c_i) = \alpha_{jk} = \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} b_i^*(b_k)$$

für alle j, k. Damit stimmen $f^\vee(c_j^*)$ und $\sum_{i=1}^m \alpha_{ji} b_i^*$ auf einer Basis überein, sind also gleich und wir erhalten

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}^*}^{\mathscr{C}^*}(f^\vee) = (\alpha_{ji})_{i,j} = \mathrm{M}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f)^t.$$