Analysis I
Wintersemester 2001/2002

Prof. Dr. Joachim Weidmann
(übertragen von Johannes Cuno)

September 2004

Inhaltsverzeichnis

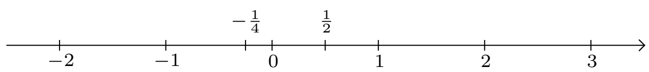
Kapitel 1

Reelle Zahlen

Eigentlich sollte man an dieser Stelle die reellen Zahlen konstruktiv einführen (natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen und schließlich die reellen Zahlen). Dies ist langwierig, mühsam und bringt, insbesondere in der jetzigen Situation, wenig Gewinn. Stattdessen soll hier der Umgang mit den reellen Zahlen – insbesondere deren algebraische Eigenschaften – als bekannt vorausgesetzt werden.

Die im Folgenden dargestellten Axiome sollen einerseits zur Vereinbarung einheitlicher Sprechweisen dienen, aber auch deutlich machen, von welchen (sehr wenigen) Grundeigenschaften wir ausgehen, auf denen aufbauend alle weiteren Eigenschaften bewiesen werden (können; was wir natürlich nicht konsequent tun werden).

Zur *Vorstellung* dient uns die *Zahlengerade* (aber eben auch nur zur Vorstellung und gelegentlich zur Heuristik, beweistechnisch wird dies aber nie benutzt werden):



Zahlen werden mit $a, b, c, \ldots, u, v, w, x, y, z; \alpha, \beta, \ldots$ bezeichnet.

Axiome der Addition

$(\mathbb{R}, +)$ ist eine *abelsche Gruppe*:

1. *kommutativ*

$$x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

2. *assoziativ*

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$$

3. Es gibt ein *neutrales Element* 0 bezüglich der Addition:

$$x + 0 = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

4. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein zugehöriges *negatives Element* $-x$ mit:

$$x + (-x) = 0$$

Für $x + (-y)$ schreiben wir kurz $x - y$.

Beobachtung. $x - y$ ist die einzige reelle Zahl (oder allgemeiner: das einzige Element der Gruppe), für die gilt $y + z = x$ (d.h. diese Gleichung hat für alle x, y genau eine Lösung, nämlich $x - y$).

Beweis.

1. $x - y$ löst die Gleichung:

$$y + (x - y) = y + (x + (-y)) = y + (-y) + x = 0 + x = x$$

2. Ist $y + z = x$, so gilt:

$$z = (y + z) - y = x - y$$

□

Axiome der Multiplikation

Statt $x \cdot y$ können wir auch einfach xy schreiben.

1. *kommutativ*

$$xy = yx$$

2. *assoziativ*

$$(xy)z = x(yz)$$

3. Es gibt ein *neutrales Element* 1 bezüglich der Multiplikation:

$$x \cdot 1 = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

4. Zu jedem $x \neq 0$ gibt es ein zugehöriges *inverses Element* x^{-1} bzw. $\frac{1}{x}$ mit:

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

Statt $x \cdot y^{-1}$ schreiben wir auch $\frac{x}{y}$, $x : y$ oder x/y.

Beobachtung. Völlig analog wie oben zeigt man, dass $x \cdot y^{-1}$ die einzige Lösung der Gleichung $y \cdot z = x$ ist.

Distributivgesetz

$$x(y+z) = xz + yz \quad \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$$

Damit ergibt sich z.B.:

$$0 \cdot x = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Beweis. Aus $0 \cdot x + x = (0+1) \cdot x = 1 \cdot x = x$ folgt, dass $0 \cdot x$ *die* Lösung von $y + x = x$ ist, also $y = x - x$. □

Damit sind die algebraischen Eigenschaften der reellen Zahlen beschrieben (aber es gibt viele andere Zahlenbereiche, die diese Eigenschaften erfüllen, die reellen Zahlen werden also dadurch nicht beschrieben). Weitere Eigenschaften sind:

$$(-1) \cdot x = -x \text{ und } (-x) \cdot (-y) = xy$$

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Eine *Teilmenge* der reellen Zahlen sind die natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{wobei } 2 := 1+1,\ 3 := 2+1,\ \ldots$$

Die natürlichen Zahlen sind also (als Teilmenge von $\mathbb{R}$) dadurch charakterisiert, dass gilt:

Induktionsaxiom. Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ($M \subset \mathbb{N}$) mit:

(a) 1 ist Element von M ($1 \in M$) und

(b) ist $n \in M$, so ist auch $n+1 \in M$ ($n \in M \Rightarrow n+1 \in M$),

so gilt $M = \mathbb{N}$.

Offensichtlich spiegelt diese Eigenschaft genau den Prozess des Zählens wider. Auf dem Induktionsaxiom beruht der *Beweis durch Induktion*.

Beweis durch Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine „Aussage" (z.B. eine Gleichung). Um alle $A(n)$ zu beweisen, genügt es zu zeigen:

(a) $A(1)$ ist wahr (*Induktionsanfang*, *Induktionsverankerung*, $n = 1$).

(b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $A(n)$ wahr, so ist auch $A(n+1)$ wahr (*Induktionsschritt*, *Induktionsschluss*, $n \Rightarrow n+1$).

Häufig wird (b) in zwei Teile zerlegt:

1. *Induktionsannahme.* $A(n)$ ist wahr (insbesondere, wenn die Aussage / Formel kompliziert ist, ist es nützlich, sie explizit hinzuschreiben) und

2. *Induktionsschritt.* Aus der Induktionsannahme folgt, dass $A(n+1)$ wahr ist.

Definition durch Induktion

Sehr wichtig ist auch die *Definition durch Induktion*. Um einen Ausdruck $A(n)$ für alle n zu definieren, genügt es, $A(1)$ zu definieren, und für jedes n den Ausdruck $A(n+1)$ mit Hilfe von $A(n)$ darzustellen. Insbesondere werden auf diese Weise einige Ausdrücke definiert, die man zunächst häufig mit „...“ schreibt:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \text{ und } n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

1. Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n : \quad \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 \\ \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \end{array}$$

Außerdem:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \text{ für } n < m, \text{ speziell } \sum_{k=1}^{0} a_k = 0$$

Für $n \geq m$:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n-m+1} a_{m-1+j}$$

2. Beispiel:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n : \quad \begin{array}{l} \prod_{k=1}^{1} a_k = a_1 \\ \prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right) \cdot a_{n+1} \end{array}$$

Außerdem:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = 1 \text{ für } n < m, \text{ speziell } \prod_{k=1}^{0} a_k = 1$$

3. Für $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ definiere die *Fakultät*:

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k$$

Also:

$$0! = 1,\ 1! = 1,\ \ldots,\ 5! = 120,\ \ldots,\ 69! \sim 10^{98}$$

Beispiel zum Beweis durch Induktion

Behauptung.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

Angeblich soll C. F. Gauß (1777-1855) diese Gleichung als Schüler wie folgt bewiesen haben, als sein Lehrer verlangte, die Zahlen $1, \ldots, 100$ zu addieren:

$$1 + 100 = 101,\ 2 + 99 = 101,\ 3 + 98 = 101,\ \ldots,\ 50 + 51 = 101$$

Es gibt 50 solcher Paare. Übung: Wie sieht diese überlegung im allgemeinen Fall aus. Der „Beweis" ist insofern unbefriedigend, als hier immernoch die Pünktchenschreibweise benutzt wird.

Beweis.

(a) $n = 1$, *Induktionsanfang.*

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \tfrac{1(1+1)}{2} \quad \text{okay}$$

(b) $n \Rightarrow n + 1$, *Induktionsschluss.*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) &= \tfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \tfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \tfrac{(n+2)(n+1)}{2} = \tfrac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

□

Was ist zum Beispiel $\sum\limits_{k=m}^{n} k$ (wobei $m \geq n$)?

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} k &= \sum_{k=1}^{m-n+1} (n - 1 + k) = (m - n + 1)(n - 1) + \sum_{k=1}^{m-n+1} k \\ &= (m - n + 1)(n - 1) + \tfrac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} \\ &= \tfrac{(m-n+1)+[2(n-1)+(m-n+2)]}{2} = \tfrac{(m-n+1)(m+n)}{2}\end{aligned}$$

Wie sieht man das schneller mit dem Gaußschen Trick?

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Offenbar gilt: Ist $M \subset \mathbb{Z}$ mit

(a) $n_0 \in M$

(b) $m \in M \Rightarrow m + 1 \in M$

so gilt $M \supset \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$. Damit ergibt sich auch, wie man per Induktion eine Eigenschaft $A(n)$ für alle $n \in \{n_0, n_0 + 1, \ldots\}$ beweist.

Eine Variante des Induktionsbeweises

Eine wichtige *Variante des Induktionsbeweises* ist die Folgende:

(a) Gilt $A(1)$ und

(b) gelten $A(1), \ldots, A(n)$, so gilt auch $A(n+1)$,

so gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} M &= \{n \in \mathbb{N} \,:\, A(n) \text{ gilt}\} \\ \tilde{M} &= \{n \in \mathbb{N} \,:\, A(1), \ldots, A(n) \text{ gilt}\} \end{aligned}$$

Dann gilt (nach Voraussetzung) $\tilde{M} = \mathbb{N}$. Wegen $M \supset \tilde{M}$ folgt daraus $M = \mathbb{N}$. $\square$

Entsprechendes gilt, wenn aus der Gültigkeit von $A(n-k), \ldots, A(n)$ die Gültigkeit von $A(n)$ folgt.

Binomialkoeffizienten

Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\tbinom{x}{k} := \prod_{j=1}^{k} \tfrac{x-j+1}{j} = \tfrac{\prod_{j=1}^{k}(x-j+1)}{k!} = \tfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$$

Für $x = n \in \mathbb{N}_0$ erhält man damit:

$$\tbinom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}$$

wobei

$$\tbinom{n}{0} = \tbinom{n}{n} = 1$$

Satz. Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ (nur diese sind interessant) gilt:

$$\tbinom{n}{k} = \tbinom{n-1}{k-1} + \tbinom{n-1}{k}$$

Vor dem Beweis zwei wichtige *Folgerungen*:

1. $\binom{n}{k}$ ist immer ganzzahlig.
2. Alle $\binom{n}{k}$ (wobei $1 \leq k \leq n$) können mit Hilfe des *Pascalschen Dreiecks* bestimmt werden.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
 & & & & & & k=0 & & & & & \\
n=0 \,— & & & & & 1 & & k=1 & & & & \\
n=1 \,— & & & & 1 & & 1 & & k=2 & & & \\
n=2 \,— & & & 1 & & 2 & & 1 & & k=3 & & \\
n=3 \,— & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & k=4 & \\
n=4 \,— & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 \,— \; 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 &
\end{array}$$

Beweis des Satzes. Wir rechnen die rechte Seite um:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{k(n-1)!+(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}$$
$$= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

□

Wichtig sind diese Koeffizienten z.B. für den *Binomischen Satz.*

Satz. Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \left(= \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!n_2!} x^{n_1} y^{n_2} \right)$$

Beweis.

(a) *Induktionsanfang*, $n = 0$.

beide Seiten sind gleich 1, okay

(b) *Induktionsverankerung.* Gleichung für n, d.h. es gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Induktionsschluss, $n \Rightarrow n+1$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^{n+1-k} y^k + x^{n-k} y^{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right]}_{\binom{n+1}{k}} x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k
\end{aligned}$$

□

Übung. Mit einer Induktion nach p kann man den *polynomischen Satz* beweisen:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_p=n} \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_p!} x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_p^{n_p}$$

Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen

Die bisher behandelten Eigenschaften der reellen Zahlen betreffen die rein algebraische Struktur. Sie wird von „vielen“ anderen Zahlenbereichen auch erfüllt. Sie bilden einen *Körper* (Beispiele sind die rationalen Zahlen und die komplexen Zahlen). Wir werden noch weitere Eigenschaften angeben, durch die die reellen Zahlen charakterisiert werden.

Anordnung

Zunächst zur *Anordnung*. Anschaulich: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{array}{ll} x > 0 \ (0 < x) & \text{falls } x \text{ rechts von Null liegt} \\ x < 0 \ (0 > x) & \text{falls } x \text{ links von Null liegt} \end{array}$$

Anordnungsaxiome

1. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt (genau eine) der folgenden Relationen:

$$x > 0,\ x = 0,\ -x > 0 \ (\text{wobei „}>\text{“} = \text{größer})$$

2. $x > 0,\ y > 0 \Rightarrow x + y > 0$

3. $x > 0,\ y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

Einige weitere *Schreibweisen*:

$$\begin{aligned} x > y &:\Leftrightarrow x - y > 0 \\ x < y &:\Leftrightarrow y > x \\ x \geq y &:\Leftrightarrow x > y \text{ oder } x = y \\ x \leq y &:\Leftrightarrow x < y \text{ oder } x = y \end{aligned}$$

Daraus leiten sich viele wichtige *Rechenregeln* ab:

1. $x < y,\ y < z \Rightarrow x < z$

   Beweis. Aus $y - x > 0$ und $z - y > 0$ folgt:

$$z - x = \underbrace{(z - y)}_{>0} + \underbrace{(y - x)}_{>0} > 0$$

□

   Übung. Gilt links an einer Stelle $\leq$, so gilt weiterhin $x < z$.

2. $x < y,\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow x + a < y + a$

   Beweis. Aus $y - x > 0$ folgt:

$$(y + a) - (x + a) = y - x > 0$$

□

3. $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$

   Beweis.

$$x < 0 \Longleftrightarrow 0 < 0 - x = -x$$

$\Rightarrow$ Addiere $-x$ auf beiden Seiten
$\Leftarrow$ Addiere x auf beiden Seiten

□

4. $x < y,\ x' \leq y' \Rightarrow x + x' < y + y'$

   Beweis.
   $$x + x' \leq x + y' < y + y'$$
   □

5. $x < y,\ a > 0 \Rightarrow ax < ay$

   Beweis. Aus $y - x > 0$ und $a > 0$ folgt:
   $$ay - ax = a(y - x) > 0 \Rightarrow ay > ax$$
   □

6. $x < y,\ a < 0 \Rightarrow ax > ay$

   Beweis. Aus $y - x > 0$ und $a < 0$ folgt:
   $$ax - ay = (-a)(y - x) > 0 \Rightarrow ax > ay$$
   □

7. $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$ (kurz $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) $\Rightarrow x^2 > 0$ ($x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$)

   Beweis.
   (a) $x > 0 \Rightarrow x^2 = x \cdot x > 0$
   (b) $x < 0 \Rightarrow x^2 = (-x)(-x) > 0$

   □

8. $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$

   Beweis.
   (a) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} = x(x^{-1})^2 > 0$
   (b) $x^{-1} > 0 \Rightarrow x = (x^{-1})^{-1} > 0$ (nach erstem Teil)

   □

9. $0 < x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$

   Beweis. Aus $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} > 0$ und $x < y$ folgt:
   $$y^{-1} = x(xy)^{-1} < y(xy)^{-1} = x^{-1}$$
   □

10. $1 > 0$

    Beweis.
    $$1 = 1^2 > 0$$
    (Da wir auf dem Zahlenstrahl die 1 rechts von der 0 gezeichnet haben, ist also diese „rechte Seite“ die Menge der positiven Zahlen.) □

Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel

Für $x_j \geq 0$ definiert man:

1. *Arithmetisches Mittel*

$$A(x_1, \dots, x_n) := \tfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

2. *Geometrisches Mittel*

$$G(x_1, \dots, x_n) := \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j}$$

(Offenbar ist der Logarithmus des geometrischen Mittels gerade das arithmetische Mittel der Logarithmen der x_j.)

3. *Harmonisches Mittel*

$$H(x_1, \dots, x_n) := \tfrac{1}{A(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n})}$$

(Hier ist aber $x_1, \dots, x_n \neq 0$ nötig.)

Satz. Es gilt:

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n)$$

Für die erste Ungleichung ist $x_j \neq 0$ nötig. Gleichheit gilt genau dann, wenn alle x_j gleich sind.

Beweis. Im folgenden beweisen wir die zweite Ungleichung. Daraus folgt (falls $x_j \neq 0$ ist) die erste Ungleichung:

$$\begin{aligned} H(x_1, \dots, x_n) &= \tfrac{1}{A(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n})} \\ &\leq \tfrac{1}{G(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n})} \\ &= \tfrac{1}{1/G(x_1, \dots, x_n)} \\ &= G(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Bleibt die zweite Ungleichung zu beweisen. Für $\lambda \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} G(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) &= \lambda G(x_1, \dots, x_n) \\ A(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) &= \lambda A(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist trivial, falls

1. ein j existiert mit $x_j = 0$ (dann ist $G = 0$)

2. alle x_j gleich sind (dann ist $G = A$)

Es genügt also zu zeigen (für $n \geq 2$):

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 + \ldots + x_n = n \text{ und } \exists j \text{ mit } x_j \neq 1 \\ \Longrightarrow x_1 \cdot \ldots \cdot x_n < 1 \end{array}}$$

Beweis durch Induktion nach n:

(a) *Induktionsanfang*, $n = 2$.

$$x_1 = 1 - \varepsilon \text{ und } x_2 = 1 + \varepsilon \Rightarrow x_1 x_2 = 1 - \varepsilon^2 < 1$$

(b) *Induktionsschluss*, $n \Rightarrow n + 1$. Ohne Einschränkung (warum?) sei

$$x_{n+1} = 1 - \alpha,\ x_1 = 1 + \beta \text{ mit } \alpha, \beta > 0$$

Mit $x_1' := x_1 + x_{n+1} - 1 = 1 - \alpha + \beta$ gilt:

$$x_1' + x_2 + \ldots + x_n = n$$

also (gemäß Induktionsannahme)

$$x_1' \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$$

Wegen $x_1 \cdot x_{n+1} = 1 - \alpha + \beta - \alpha\beta < x_1'$ folgt daraus:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} < x_1' \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$$

□

Bernoullische Ungleichung

Bei vielen Abschätzungen ist folgendes Resultat nützlich.

Satz. Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Tatsächlich gilt dies sogar für $x \geq -2$, Differentialrechnung.

Beweis. Induktion nach n.

(a) *Induktionsanfang*, $n = 1$.

$$(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x$$

(b) *Induktionsschluss*, $n \Rightarrow n + 1$.

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)(1 + x)^n \\ &\geq (1 + x)(1 + nx) \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x \end{aligned}$$

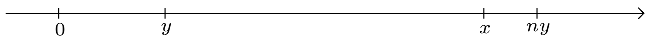
□

Archimedisches Axiom

Für beliebige $x > 0$, $y > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$x < ny$$

(Anschaulich auf der Zahlengerade ist dies offensichtlich:



Es folgt aber nicht aus den übrigen Axiomen.)

Folgerungen

1. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$. Kurz:

   $$\forall\, x \in \mathbb{R} \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; n > x$$

   Es gibt ein eindeutig bestimmtes

   $$n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \leq x < n+1$$

   Man schreibt dafür:

   $$[x] = \{\text{größte ganze Zahl } \leq x\}$$

2. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (bzw. n mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$)
3. $\forall\, a > 1 \;\; \forall\, K \geq 0 \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; a^n > K$

   Beweis. Sei $x := a - 1$, $a = 1 + x$. Dann folgt nach Bernoulli:

   $$a^n = (1+x)^n \geq 1 + nx$$

   Wähle nun n so groß, dass $nx > K - 1$. □
4. $\forall\, a$ mit $0 < a < 1 \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; a^n < \varepsilon$

   Beweis. Aus $\frac{1}{a} > 1$ und $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ folgt:

   $$\exists\, n \in \mathbb{N} \;\; \left(\tfrac{1}{a}\right)^n > \tfrac{1}{\varepsilon}, \;\; a^n < \varepsilon$$

   □

Die Aussagen 2., 3. und 4. gelten dann immer auch für alle größeren n.

Der Betrag

Der *Betrag* einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist

$$|x| = \text{„Betrag von } x\text{“} := \left\{ \begin{array}{rl} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{array} \right\} = {}_{+}\sqrt{x^2}$$

Offensichtlich gelten die folgenden Aussagen:

$$|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad |-x| = |x|\,, \quad |xy| = |x| \cdot |y|$$

Falls $y \neq 0$ gilt außerdem:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Dreiecksungleichung

$$|x+y| \leq |x| + |y| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Beweis. Offensichtlich gilt $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$, also $x+y \leq |x|+|y|$. Entsprechend gilt $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$, also $-(x+y) \leq |x|+|y|$. Damit folgt die Behauptung, da $|x+y| = x+y$ oder $-(x+y)$ ist. □

Folgerung

$$|x \pm y| \geq \begin{cases} |x| - |y| \\ |y| - |x| \end{cases} \qquad \text{d.h. } |x \pm y| \geq ||x| - |y||$$

Beweis.

$$|x| = |(x \pm y) \mp y| \leq |x \pm y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x \pm y|$$

Entsprechend folgt:

$$|y| - |x| \leq |x \pm y|$$

□

Damit haben wir alle für das Rechnen (ohne Grenzwertbetrachtungen) nötigen Eigenschaften der reellen Zahlen beschrieben. Die reellen Zahlen sind aber damit nicht charakterisiert. Zum Beispiel erfüllen die *rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} := \left\{ \tfrac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

alle bisherigen Axiome.

Andererseits erwarten wir, dass jede positive Zahl eine Quadratwurzel besitzt. Aus den bisherigen Axiomen kann das nicht gefolgert werden, denn sonst hätte auch jede positive rationale Zahl eine rationale Quadratwurzel. Das ist nicht der Fall: Zum Beispiel hat 2 keine rationale Quadratwurzel. Es fehlt noch das Vollständigkeitsaxiom (Kapitel 3).

Kapitel 2

Konvergenz von Folgen und Reihen

Eine (hier zunächst reelle) *Folge* ist eine Abbildung (Zuordnung, Funktion) von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, d.h. jedem $n \in \mathbb{N}$ ist ein $x_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Man schreibt dafür:

$$(x_n) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, \ldots)$$

Ebenso betrachten wir Folgen der Form:

$$(x_n)_{n \geq n_0} = (x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots) \text{ mit } n_0 \in \mathbb{Z}$$

Einfache *Beispiele* sind:

1. *Konstante Folge*

$$x_n = x \text{ für alle } n$$

2. *Arithmetische Folge*

$$x_n = a + nb \text{ bzw. speziell } x_n = n$$

3. $x_n = \frac{1}{n}$ oder allgemeiner $x_n = \frac{a}{n}$
4. $x_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, \ldots)$
5. $x_n = a^n$ mit einem $a \in \mathbb{R}$ (4. ist ein Spezialfall, $a = -1$)
6. *Fibonacci-Folge* (Leonardo von Pisa $\approx$ Fibonacci, 1180-1250; Kaninchenvermehrung). Sie ist induktiv definiert durch:

$$x_0 := 1, \; x_1 := 1, \; x_{n+1} := x_{n-1} + x_n \text{ für } n \geq 1$$

das liefert:

$$(x_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots)$$

oder allgemeiner:

$$x_0 := a, \; x_1 := b, \; x_{n+1} := x_{n-1} + x_n \text{ für } n \geq 1$$
$$(x_n) = (a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, \ldots)$$

Konvergenz

Unter *Konvergenz* einer Folge (x_n) gegen einen Wert x stellen wir uns vor, dass x_n für „große n“ der Zahl x „sehr nahe“ kommt und sich auch nicht mehr weit davon entfernt. Die beliebte Formulierung „immer näher kommt“ ist allerdings gefährlich, sie suggeriert, dass x_{n+1} näher an x (oder zumindest gleich nahe an x) liegt wie x_n. Es ist nicht sinnvoll, dies zu fordern.

Definition. Die Folge (x_n) *konvergiert gegen* $x \in \mathbb{R}$ (oder: ist *konvergent gegen* $x \in \mathbb{R}$), wenn gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so,
dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|x_n - x| < \varepsilon$.

oder formaler:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall\ n \geq n_0 \quad |x_n - x| < \varepsilon$$

Eine solche Zahl x (falls sie existiert) heißt dann der *Grenzwert* oder *Limes* der Folge (x_n).

Satz (Eindeutigkeit des Grenzwerts). Jede Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ hat *höchstens einen* Grenzwert (aber natürlich gibt es Folgen ohne Grenzwert, beispielsweise $x_n = (-1)^n$ oder $x_n = n$).

Beweis durch Widerspruch. Wir zeigen, dass die Annahme

„Es gibt mindestens zwei Grenzwerte $x \neq x'$.“

zu einem Widerspruch führt. Sind $x \neq x'$ Grenzwerte und

$$\varepsilon := \tfrac{1}{2}\,|x - x'|$$

so gibt es:

$$n_1 \in \mathbb{N} \text{ mit } |x - x_n| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_1$$
$$n_2 \in \mathbb{N} \text{ mit } |x' - x_n| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_2$$

Für $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ gilt also:

$$|x - x'| = |x - x_n + x_n - x'| \leq |x - x_n| + |x_n - x'| < 2\varepsilon = |x - x'|$$

ein Widerspruch. □

Schreibweise

Für (x_n) konvergiert gegen x schreiben wir:

$$x_n \to x \text{ für } x \to \infty,\ x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x,\ x_n \to x,\ x = \lim_{n\to\infty} x_n,\ x = \lim x_n$$

Divergente Folgen und Nullfolgen

Eine Folge (x_n) heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergiert. Eine Folge (x_n) heißt *Nullfolge*, wenn $x_n \to 0$ gilt. Damit gilt offenbar:

$$x_n \to x \Leftrightarrow (x_n - x) \text{ ist Nullfolge}$$

Beispiele

Schauen wir uns die obigen *Beispiele* an:

1. $x_n = x \Rightarrow x_n \to x$ (da $|x_n - x| = 0 \;\; \forall\, n$)
2. $x_n = n$ ist divergent. Offensichtlich gibt es kein x, dem die x_n für goße n nahe kommen.
$$x_n = a + nb \quad \begin{array}{l} \text{konvergent} \\ \text{divergent} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} b = 0 \\ b \neq 0 \end{array}$$
3. $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to 0$ (vgl. Folgerung aus dem archimedischen Axiom)
4. $x_n = (-1)^n$ ist divergent. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$|x_n - x| \geq 1 \quad \begin{array}{l} \text{für gerades } n \\ \text{für ungerades } n \end{array} \quad \text{für alle} \quad \begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 0 \end{array}$$
5. Schauen wir uns später an.
6. Fibonaccifolge:
$$\text{Induktion} \Rightarrow x_n \geq n \;\; \forall\, n$$
Daraus folgt Divergenz (z.B. mit folgendem Satz).

Beschränkte Folgen

Definition. Eine Folge (x_n) heißt *beschränkt*, wenn ein $K \geq 0$ existiert mit:
$$|x_n| \leq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
Sie heißt *nach oben beschränkt*, wenn ein K existiert mit:
$$x_n \leq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
Sie heißt *nach unten beschränkt*, wenn ein K existiert mit:
$$x_n \geq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
Es gilt:
$$(x_n) \text{ ist beschränkt} \Leftrightarrow (x_n) \text{ ist nach oben } \textit{und} \text{ unten beschränkt}$$
Satz. Jede konvergente Folge ist beschränkt (bzw. jede unbeschränkte Folge ist divergent).

Hinweis. Nicht jede beschränkte Folge ist konvergent ($x_n = (-1)^n$).

Beweis. Sei $x_n \to x$. Daraus folgt:
$$\exists\, n_0 \;\; \forall\, n \geq n_0 \quad |x_n - x| < 1$$
$$\Rightarrow |x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x| \quad \forall\, n \geq n_0$$
Mit $M := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0 - 1}|, 1 + |x|\}$ gilt:
$$|x_n| \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
□

Als Alternative überlege man sich einen direkten Beweis der eingeklammerten Aussage. Wir kommen zurück zum oben ausgelassenen

Beispiel 5. $x_n = a^n \ (a \in \mathbb{R})$

1. $|a| < 1 \Rightarrow x_n \to 0$
2. $a = 1 \Rightarrow x_n = 1 \to 1$
   Die Folge ist also konvergent für $-1 < a \leq 1$.
3. $a = -1 \Rightarrow (x_n)$ beschränkt aber divergent
4. $|a| > 1 \Rightarrow (x_n)$ ist unbeschränkt, also divergent

Beweis.

1. Aus einer Folgerung aus dem archimedischen Axiom folgt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall\, n \geq n_0 \quad |a|^n < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |a^n - 0| = |a^n| = |a|^n < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0$$

2. offensichtlich
3. offensichtlich
4. Wieder aus einer Folgerung aus dem archimedischen Axiom folgt:

$$\forall\, K \in \mathbb{R} \ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall\, n \geq n_0 \quad |a|^n > K$$
$$\Rightarrow (x_n) \text{ ist unbeschränkt} \Rightarrow (x_n) \text{ ist divergent.}$$

□

Rechnen mit konvergenten Folgen

Aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ folgt:

1. $x_n \pm y_n \to x \pm y$
2. $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$
3. gilt außerdem $y \neq 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $y_n \neq 0$ für $n \geq n_0$, und für die Folge

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \geq n_0}$$

   gilt:

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$$

Beweis.

1. Nach Voraussetzung:

$$x_n \to x \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_1 \ \ \forall\, n \geq n_1 \quad |x_n - x| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$
$$y_n \to y \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_2 \ \ \forall\, n \geq n_2 \quad |y_n - y| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Also gilt $\forall\, n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$:

$$|(x_n \pm y_n) - (x \pm y)| = |(x_n - x) \pm (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$$

das heißt:

$$x_n \pm y_n \to x \pm y$$

2. Da (z.B.) (x_n) beschränkt ist, existiert K mit $|x_n| \leq K$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n|\,|y_n - y| + |x_n - x|\,|y| \\ &\leq K\,|y_n - y| + |y|\,|x_n - x| \end{aligned}$$

   Nach Voraussetzung:

$$\begin{array}{c} \forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_1 \ \ \forall\ n \geq n_1 \quad |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|+1} \\ \forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_2 \ \ \forall\ n \geq n_2 \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2K+1} \end{array}$$

   Also gilt $\forall\, n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$:

$$|x_n y_n - xy| < \varepsilon$$

3. *Spezialfall* $x_n = 1$: Wegen $y_n \to y \neq 0$ existiert ein n_1 mit

$$|y_n| = \tfrac{|y|}{2} > 0 \text{ für alle } n \geq n_1$$

   Außerdem existiert ein n_2 mit

$$|y_n - y| < \tfrac{y^2}{2}\varepsilon \text{ für } n \geq n_2$$

   Also gilt $\forall\, n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$:

$$\left|\tfrac{1}{y_n} - \tfrac{1}{y}\right| = \left|\tfrac{y - y_n}{y_n y}\right| < \tfrac{y^2}{2}\varepsilon \tfrac{2}{|y|}\tfrac{1}{|y|} = \varepsilon$$

   Daraus folgt:

$$\tfrac{1}{y_n} \to \tfrac{1}{y}$$

   Allgemeiner Fall:

$$\tfrac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \tfrac{1}{y_n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spezialfall}}}{\longrightarrow} x \cdot \tfrac{1}{y} = \tfrac{x}{y}$$

□

Damit lassen sich leicht *Beispiele* des folgenden Typs behandeln:

1. Beispiel:

$$x_n = \tfrac{2n^2+n-7}{n^2-2} = \tfrac{2+\frac{1}{n}-\frac{7}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}} \to 2$$

2. Beispiel:

$$x_n = \frac{3n^3+2n}{4n^4} = \frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}}{4} \to \frac{0}{4} = 0$$

3. Beispiel:

$$x_n = \frac{5n^3+3n}{4n^2} = \frac{1}{4}\left(5n+\frac{3}{n}\right) \text{ divergent}$$

Oder allgemein ($a_p \neq 0,\ b_q \neq 0$):

$$\frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1}+\ldots}{b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1}+\ldots} \begin{cases} \to 0 & \text{für } p < q \\ \to \frac{a_p}{b_p} & \text{für } p = q \\ \text{divergent} & \text{für } p > q \end{cases}$$

Konvergente Folgen und Ungleichungen

Satz. Seien $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ reelle Folgen.

1. Aus $x_n \to x,\ y_n \to y$ und $x_n \leq y_n$ folgt $x \leq y$.

   Hinweis. $x_n < y_n \not\Rightarrow x < y$

2. Aus $x_n \to x,\ y_n \to x$ und $x_n \leq z_n \leq y_n$ folgt $z_n \to x$.
3. Aus $y_n \to 0$ und $|x_n| \leq y_n$ folgt $x_n \to 0$.

Beweis.

1. Beweis durch Widerspruch. Annahme $x > y$, also:

$$\varepsilon := \frac{1}{2}(x-y) > 0$$

   Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\exists\ n_1 \text{ mit } |x_n - x| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_1 \\ &\exists\ n_2 \text{ mit } |y_n - y| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_2 \end{aligned}$$

   Also gilt für $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$:

$$x_n > x - \varepsilon,\ y_n < y + \varepsilon$$

   und

$$x_n > x - \varepsilon = y + 2\varepsilon - \epsilon = y + \epsilon > y_n$$

   Dies steht im Widerspruch zur Annahme.

2. Es gilt:

$$\begin{aligned} |z_n - x| &\leq |z_n - x_n| + |x_n - x| \\ &\leq |y_n - x_n| + |x_n - x| \\ &\leq |y_n - x| + 2\,|x_n - x| \to 0 \end{aligned}$$

3. $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_0$ mit $y_n \leq |y_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, also auch:

$$|x_n - 0| = |x_n| \leq y_n < \varepsilon$$

□

Unendliche Reihen

Sei (x_n) eine (reelle) Folge. Kann man der „Summe aller x_n" einen Wert zuordnen? Nach den bisherigen Eigenschaften / Rechenregeln in $\mathbb{R}$ kann man nur die Summe endlich vieler Terme berechnen. Deshalb definiert man:

$$s_m := \sum_{n=0}^{m} x_n \quad m\text{-}te\ Partialsumme$$

Die *Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ heißt *konvergent*, wenn die Folge (s_m) der Partialsummen konvergiert. Der Grenzwert der Folge (s_m) (falls er existiert) heißt die *Summe* (oder der *Wert*) der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$; er wird mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n,\ \sum_n x_n,\ \sum x_n$$

bezeichnet. Wegen $x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})$ gilt offensichtlich:

$$\text{Folge } (x_n) \text{ konvergent} \Leftrightarrow \text{Reihe } \sum_k (x_k - x_{k-1}) \text{ konvergent}$$

Einige einfache Beispiele

1. Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Teleskopreihe

$$= \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1$$

2. Beispiel: *Geometrische Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

1. Fall: $x = 1 \Rightarrow s_m = m + 1 \Rightarrow$ Reihe ist divergent

2. Fall: $x \neq 1$

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} x^n = \frac{1-x^{m+1}}{1-x} \quad \text{(Beweis durch Induktion)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_m \to \frac{1}{1-x} & \text{für } |x| < 1 \\ \text{divergent} & \text{für } |x| > 1 \text{ und } x = -1 \end{cases}$$

Die geometrische Reihe ist also genau dann konvergent, wenn $|x| < 1$ gilt.

(a) *Spezialfall:* $x = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

(b) *Spezialfall:* $x = -\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

3. Beispiel: *Harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ ist divergent.}$$

$$1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\ldots + \frac{1}{32}}_{>\frac{1}{2}} + \ldots$$

Diese Überlegung zeigt, dass die Partialsummen jeden Wert Übersteigen, d.h. die Reihe ist divergent.

Genauer: Induktiv zeigt man $s_{2^n} > \frac{n+2}{2}$.

Diese Reihe divergiert allerdings „sehr langsam“:

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n} \sim 2{,}93 \ ; \ \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} \sim 5{,}19 \ ; \ \sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n} \sim 7{,}49 \ ; \ \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{n} \sim 9{,}79$$

Ohne Tricks anzuwenden wäre auf einem Rechner (bis auf Rundungsfehler) maximal erreichbar:

$$\sum_{n=1}^{10^{10}} \frac{1}{n} \sim 23{,}6$$

4. Beispiel: *Periodische Dezimalbrüche*

$$1{,}23\overline{57} := 1{,}2357575757\ldots$$

ist beispielsweise definiert als:

$$\begin{aligned}
&:= \tfrac{123}{100} + 57 \cdot 10^{-4} + 57 \cdot 10^{-6} + 57 \cdot 10^{-8} + \ldots \\
&= \tfrac{123}{100} + 57 \cdot 10^{-4} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (10^{-2})^n}_{=\frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{1}{0{,}99} = \frac{100}{99}} \\
&= \tfrac{123}{100} + \tfrac{57}{9900} = \tfrac{123}{100} + \tfrac{19}{3300} \\
&= 1 + \tfrac{759+19}{3300} = 1\tfrac{778}{3300} = 1\tfrac{389}{1650}
\end{aligned}$$

So kann jeder periodische Dezimalbruch in einen Bruch verwandelt werden (jeder Bruch liefert einen periodischen Dezimalbruch!).

Uneigentliche Konvergenz

Es ist manchmal nützlich, divergente Folgen (ggf. auch Reihen) genauer zu unterscheiden:

Eine Folge (x_n) heißt *bestimmt divergent gegen* $\pm\infty$, wenn gilt:

$$\forall\ K \in \mathbb{R}\ \ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\ n \geq n_0\ \ x_n \gtrless K$$

Man schreibt dann (etwas irreführend) auch $x_n \to \pm\infty$ oder $\lim x_n = \pm\infty$ und spricht von *uneigentlicher Konvergenz.*

Beispiele

1. $x_n = n$ ist bestimmt divergent, $x_n \to \infty$.
2. $x_n = -n$ ist bestimmt divergent, $x_n \to -\infty$.
3. $x_n = (-1)^n$ oder $x_n = n(-1)^n$ oder $x_n = a^n$ mit $a < -1$ ist divergent, aber nicht bestimmt divergent.
4. $x_n = n + (-1)^n$ ist bestimmt divergent, $x_n \to \infty$.

Satz.

1. Sei (x_n) bestimmt divergent. Dann existiert ein n_0 mit $x_n \neq 0$ für $n \geq n_0$ und die Folge
$$\left(\tfrac{1}{x_n}\right)_{n \geq n_0}$$
konvergiert gegen 0.
2. Es gilt:
$$\begin{aligned} x_n > 0,\ x_n \to 0 &\Rightarrow \tfrac{1}{x_n} \to \infty \\ x_n < 0,\ x_n \to 0 &\Rightarrow \tfrac{1}{x_n} \to -\infty \end{aligned}$$

Beweis.

1. $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_0\ \ \forall\ n \geq n_0\ \ \ |x_n| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$
2. $x_n > 0\ :\ \ \forall\ K > 0\ \ \exists\ n_0\ \ \forall\ n \geq n_0\ \ x_n < \frac{1}{K} \Rightarrow \frac{1}{x_n} > K$
   $x_n < 0\ :$ entsprechend

□

Unendliche Produkte

Sei (x_n) eine (reelle) Folge. Man definiert:

$$\prod_{n=1}^{\infty} x_n \text{ existiert} :\Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} x_n \text{ existiert}$$

Beispiele

Ein paar *Beispiele*

1. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{m} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{m\to\infty} (m+1)$ divergent

2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{m} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} = 0$ (existiert also)

3. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4} \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdots \frac{m\cdot m}{(m-1)(m+1)} =$

   $= \lim\limits_{m\to\infty} 2\frac{m}{m+1} = 2$

Anmerkung

Mit Hilfe des Logarithmus können unendliche Produkte (unter Umständen) auf Reihen zurückgeführt werden:

$$\ln \prod a_n = \sum \ln a_n$$

Die weiter unten bewiesenen Konvergenzkriterien für Reihen können also in Konvergenzkriterien für unendliche Prödukte übersetzt werden.

Anmerkung

Wir konnten bisher die Konvergenz einer Reihe nur (höchstens) dann beweisen, wenn wir gleichzeitig den Grenzwert angeben konnten. Erst mit Hilfe der *Vollständigkeit* werden wir Konvergenz auch in Fällen beweisen können, wo wir den Grenzwert nicht explizit kennen.

Kapitel 3

Vollständigkeit der reellen Zahlen

Wenn die Folge (x_n) gegen x konvergiert, liegen die x_n für große n sehr nahe bei x. Wegen der Dreiecksungleichung liegen sie dann auch untereinander sehr nahe beisammen. Folgen mit dieser Eigenschaft nennt man Cauchyfolgen (Augustin Louis Cauchy 1789-1857), genauer:

Eine Folge (x_n) heißt eine *Cauchyfolge* (C.F.), wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n, m > n_0 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Satz. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Gilt auch die Umkehrung? (Anschaulich scheint es plausibel, dass die Cauchy-Eigenschaft die Konvergenz charakterisiert). Aus den bisherigen Axiomen folgt dies jedenfalls nicht. Sonst müssten z.B. auch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die alle bisherigen Axiome erfüllen, diese Eigenschaft haben. Der folgende Satz zeigt, dass dies nicht der Fall ist.

Satz. Es gibt kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$ (entsprechend für 3, 5, 6, 7, 8, …)

Beweis. Annahme: Es gibt ein

$$a = \tfrac{p}{q} \text{ mit } a^2 = 2.$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass p und q teilerfremd sind (d.h. der Bruch kann nicht weiter gekürzt werden).

$$\Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Das heißt p^2 ist durch 2 teilbar, also auch p. Sei $p =: 2p'$.

$$\Rightarrow 4p'^2 = 2q^2 \;, \quad 2p'^2 = q^2$$

Das heißt auch q ist durch 2 teilbar. Dies steht im Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q. □

Damit können wir sofort eine *Cauchyfolge in* $\mathbb{Q}$ konstruieren, *die in* $\mathbb{Q}$ *keinen Grenzwert hat*: Sei x_n der größte n-stellige Dezinalbruch mit $x_n^2 \leq 2$.

Also:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}4 \\ x_2 &= 1{,}41 \\ x_3 &= 1{,}414 \\ x_4 &= 1{,}4142 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dann ist (x_n) jedenfalls eine Cauchyfolge, denn es gilt (für $n \leq m$):

$$|x_n - x_m| = x_m - x_n \leq 10^{-n}$$

Außerdem gilt:

$$x_n^2 \to 2$$

Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es wegen $x_n^2 \leq 2$ und $x_n \leq x_{n+1}$ ein $l \in \mathbb{N}$ mit:

$$x_n^2 < 2 - 10^{-l} \ , \quad x_n^2 + 10^{-l} < 2 \quad \text{für alle } n$$

Dann würde aber gelten:

$$(x_{l+1} + 10^{-l-1})^2 = x_{l+1}^2 + 2 \cdot 10^{-l-1} x_{l+1} + 10^{-2l-2} \leq x_{l+1}^2 + \underbrace{5 \cdot 10^{-l-1}}_{<10^{-l}} < 2$$

Dies steht im Widerspruch zur Konstruktion von x_{l+1}.
Gäbe es ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$, so würde folgen:

$$x^2 = \lim x_n^2 = 2$$

im Widerspruch zu obigem Satz.

Vollständigkeitsaxiom

Damit kommen wir zur letzten noch ausstehenden Eigenschaft von $\mathbb{R}$:

Vollständigkeitsaxiom. $\mathbb{R}$ ist *vollständig*, d.h. jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{R}$ konvergent. Wir werden im Folgenden 5 weitere Eigenschaften kennenlernen, die zur Vollständigkeit äquivalent sind (die also auch als Definition hätten verwendet werden können).

Vokabeln im Zusammenhang mit Folgen

Eine Folge (x_n) heißt

1. *wachsend* (genauer: *nichtfallend*), wenn für alle n gilt $x_n \leq x_{n+1}$
2. *strikt wachsend*, wenn für alle n gilt $x_n < x_{n+1}$

Entsprechend *fallend* (*nichtwachsend*) und *strikt fallend*. Die Begriffe *monoton* und *streng monoton* verstehen sich damit von selbst.

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn ein K existiert mit $x \leq K$ für alle $x \in M$; entsprechend *nach unten beschränkt* und *beschränkt*. Die entsprechenden Zahlen K heißen *obere / untere Schranke* von M. Existiert eine kleinste obere Schranke, so heißt diese das *Supremum von* M, $\sup M$; entsprechend heißt eine größte untere Schranke das *Infinmum von* M, $\inf M$.

Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge von Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a_n \le x \le b_n\}$$
$$\text{mit } I_{n+1} \subset I_n \text{ und } |I_n| := b_n - a_n \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Ein *Schnitt* in $\mathbb{R}$ ist eine Zerlegung von $\mathbb{R}$ in zwei disjunkte (punktfremde) Teilmengen:

$$A, B \subset \mathbb{R}\ , \quad A \cup B = \mathbb{R}\ (A \cap B = \emptyset)$$
$$\text{mit der Eigenschaft } x < y \text{ für alle } x \in A,\ y \in B.$$

Ein Punkt x_0 heißt ein *Trennungspunkt*, wenn gilt:

$$x \le x_0 \text{ für alle } x \in A,\ x \ge x_0 \text{ für alle } x \in B$$

Ist (x_n) eine Folge und (n_k) eine Folge aus $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, so heißt

$$(x_{n_k}) = (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$$

eine *Teilfolge* von (x_n).

Äquivalente Vollständigkeitsaxiome

Satz. Auf Grundlage der bisherigen Axiome für die reellen Zahlen sind die folgenden Vollständigkeitsaxiome äquivalent:

(*i*) *Supremumsprinzip.* Jede nach oben (nach unten) beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum).

(*ii*) *Monotonieprinzip.* Jede beschränkte monotone Folge (x_n) ist konvergent.

(*iii*) *Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß*[1]. Jede beschränkte Folge (x_n) enthält eine konvergente Teilfolge.

(*iv*) *Cauchysches Konvergenzprinzip.* Jede Cauchyfolge (x_n) in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

(*v*) *Intervallschachtelungsprinzip.* Jede Intervallschachtelung hat genau einen Punkt x, der in allen I_n enthalten ist.

(*vi*) *Dedekindsches Schnittaxiom*[2]. Jeder Schnitt hat (genau) einen Trennungspunkt.

Wenn wir im Folgenden die Vollständigkeit der reellen Zahlen benutzen, können wir also auf die jeweils bequemste der sechs Eigenschaften zurückgreifen.

Zum Beweis benötigen wir den (auch unabhängig hiervon) interessanten

Hilfssatz. Jede Folge (x_n) aus $\mathbb{R}$ enthält eine monotone Teilfolge (y_k).

Beweis. Wir nennen $n \in \mathbb{N}$ einen Gipfelpunkt der Folge (x_n), wenn für alle $m \ge n$ gilt $x_m \le x_n$. Offenbar gibt es zwei Möglichkeiten:

[1] Bolzano 1781-1878, Weierstraß 1815-1897
[2] Dedekind 1831-1916

1. (x_n) hat unendlich viele Gipfelpunkte $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Dann ist

$$(y_k) = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$$

eine fallende Teilfolge von (x_n).

2. (x_n) hat (höchstens) endlich viele Gipfelpunkte. In diesem Fall definieren wir induktiv:

   (a) $n_1 :=$ größter Gipfelpunkt $+ 1$
   Bemerkung. Falls kein Gipfelpunkt existiert, sei $n_1 := 1$.

   (b) Sind $n_1 < \ldots < n_k$ gefunden, so sei $n_{k+1} > n_k$ so gewählt, dass $x_{n_{k+1}} > x_{n_k}$ (ein solches existiert, da n_k nicht Gipfelpunkt ist).

   Die so konstruierte Folge ist eine (strikt) wachsende Teilfolge von (x_n). (Natürlich kann (x_n) sowohl wachsende wie auch fallende Teilfolgen enthalten.)

□

Beweis des Satzes. Durch Übergang $x \leftrightarrow -x$ erkennt man:

(a) Supremumsprinzip $\Leftrightarrow$ Infimumsprinzip

(b) Monotonieprinzip $\Leftrightarrow$ wachsend ... $\Leftrightarrow$ fallend ...

Wir beweisen:

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (i)$$

1. $(i) \Rightarrow (ii)$. Ohne Einschränkung sei (x_n) nicht fallend. Da die Menge

$$\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

beschränkt ist, existiert ihr Supremum x_0. Da x_0 die *kleinste obere* Schranke ist, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon)$ mit:

$$x_0 - \varepsilon < x_n \leq x_0 \text{ für } n \geq n(\varepsilon)$$

Also gilt $x_n \to x_0$.

2. $(ii) \Rightarrow (iii)$. Nach obigem Hilfssatz enthält (x_n) eine monotone Teilfolge, die natürlich auch beschränkt ist und somit nach (ii) konvergiert.

3. $(iii) \Rightarrow (iv)$. Wie für konvergente Folgen sieht man leicht, dass auch jede Cauchyfolge beschränkt ist (Beweis?). Nach (iii) enthält also (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}):

$$x_{n_k} \to x$$

Wir zeigen, dass die gesamte Folge (x_n) gegen x konvergiert:

$$x_n \to x$$

Weil $x_{n_k} \to x$ konvergiert und (x_n) eine Cauchyfolge ist, gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, k_0 \;\; \begin{cases} \forall\, k \geq k_0 & |x - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall\, m, n \geq n_{k_0} & |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Daraus folgt für $n \geq n_{k_0}$:

$$|x - x_n| \leq \left|x - x_{n_{k_0}}\right| + \left|x_{n_{k_0}} - x_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also $x_n \to x$.

4. $(iv) \Rightarrow (v)$. Die Folgen (a_n) und (b_n) sind Cauchyfolgen, denn es gilt:

$$|a_n - a_m| \leq |I_n| - |I_m| \quad \text{und} \quad |b_n - b_m| \leq |I_n| - |I_m|$$

Nach (iv) existieren also a und b mit

$$a_n \to a \quad \text{und} \quad b_n \to b$$

Wegen $b_n - a_n \to 0$ folgt $a = b$. Also:

$$a_n \nearrow a,\; b_n \searrow b \text{ und } a_n \leq a = b \leq b_n, \text{ d.h. } a \in I_n \text{ für alle } n$$

Wegen $|I_n| \to 0$, kann es keine zwei Punkte geben, die in allen I_n liegen.

5. $(v) \Rightarrow (vi)$. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n \in A$, $b_n \in B$.

   (a) Wähle $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ beliebig.

   (b) Ist $\frac{a_1+b_1}{2} \in A$, so sei:

   $$a_2 := \frac{a_1+b_1}{2} \text{ und } b_2 := b_1$$

   Ist $\frac{a_1+b_1}{2} \in B$, so sei:

   $$a_2 := a_1 \text{ und } b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$$

   Dies setzen wir induktiv fort. Daraus folgt: I_n ist eine Intervallschachtelung und nach (iv) existiert (genau) ein $a \in I_n \;\forall\, n$.

   Annahme. $a > y$ für ein $y \in B$. Wegen $b_n \geq a$ und $y \geq a_n$ für alle n, folgt:

   $$b_n - a_n \geq a - y > 0 \quad \forall\, n$$

   Das ist ein Widerspruch zu $b_n - a_n \to 0$. Also $a \leq y \;\forall\, y \in B$. Entsprechend folgt $x \leq a \;\forall\, x \in A$.

   Eindeutigkeit. Sind a, a' Trennungspunkte, so kann es keine Punkte dazwischen geben, da sie nicht zu A und nicht zu B könnten. Also ist $a = a'$.

6. $(vi) \Rightarrow (i)$. Sei:

$$\begin{aligned} B &:= \{y \in \mathbb{R} \;:\; y > x \text{ für alle } x \in M\} \\ A &:= \mathbb{R} \setminus B \quad (\Rightarrow M \subset A) \end{aligned}$$

Behauptung. A, B ist ein *Schnitt*: $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$. Aus $x \in A$, $y \in B$ und $x \geq y$ folgt x ist größer als jedes Element aus M, also $x \in B$. Dies ist ein Widerpruch, d.h. es gilt auch:

$$x < y \quad \forall\, x \in A,\ y \in B$$

Nach (vi) existiert also ein $a \in \mathbb{R}$ mit $x \leq a$ für $x \in A$, $y \geq a$ für $y \in B$.

$$\Rightarrow a \geq x \text{ für alle } x \in M \text{ (d.h. } a \text{ ist obere Schranke von } M)$$

Bleibt zu zeigen, dass es die kleinste obere Schranke ist.
Annahme. Es existiert ein $b < a$ mit $b \geq x$ für alle $x \in M$.

$$\Rightarrow \tfrac{a+b}{2} > x \text{ für alle } x \in M\ ,\ \tfrac{a+b}{2} \in B\ ,\ \tfrac{a+b}{2} < a$$

Daraus folgt, dass a nicht Trennungspunkt ist. Widerspruch!

□

Darstellung von $\mathbb{R}_+$ durch unendliche Dezimalbrüche

Satz. Jeder (endliche oder) unendliche Dezimalbruch stellt eine reelle Zahl dar. Genauer: Sei $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ mit $a_0 \in \mathbb{N}_0$ und $a_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für $j \geq 1$.

$$x_n := a_0, a_1 \ldots a_n$$

Dann existiert eine reelle Zahl x mit $x_n \to x$.

Beweis. Offensichtlich gilt für $n \leq m$:

$$|x_n - x_m| \leq 10^{-n}$$

d.h. (x_n) ist eine Cauchyfolge, also konvergent. □

Es gilt aber auch:

Satz. Jede positive reelle Zahl lässt sich eindeutig als *unendlicher* Dezimalbruch darstellen. (Die Eindeutigkeit geht verloren, wenn man auch endliche Dezimalbrüche zulässt.)

Beweis.

1. *Existenz.* Sei

$$\begin{aligned} a_0 &:= \text{größte ganze Zahl} < x \\ a_1 &:= \text{größte ganze Zahl } a_0, a_1 < x \\ &\ \ \vdots \\ a_{n+1} &:= \text{größte ganze Zahl } a_0, a_1 \ldots a_n a_{n+1} < x \end{aligned}$$

Für $x_n := a_0, a_1 \ldots a_n$ gilt dann:

$$|x_n - x| < 10^{-n}$$

Also $x_n \to x$, d.h. der unendliche Dezimalbruch $a_0, a_1 a_2 \ldots$ stellt x dar.

2. *Eindeutigkeit.* Seien $a_0, a_1 a_2 \ldots \neq b_0, b_1 b_2 \ldots$ Darstellungen von x.

$$x_n := a_0, a_1 \ldots a_n \text{ und } y_n := b_0, b_1 \ldots b_n$$

   Sei n_0 der kleinste Index mit:

$$a_{n_0} \neq b_{n_0} \quad (\text{o.E. } a_{n_0} < b_{n_0})$$

   Sei n_1 der kleinste Index $> n_0$ mit $b_{n_1} \neq 0$. Dann gilt für alle $n \geq n_1$:

$$|x_n - y_n| > 10^{-n_1} \Rightarrow \lim x_n \neq \lim y_n$$

   Dies ist ein Widerspruch.

□

Im schlimmsten Fall:

$$\boxed{\begin{array}{cccccccccccccc} a_0 & , & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n_0-1} & a_{n_0} & 9 & 9 & 9 & \cdots & 9 & 9 & \cdots \\ = & & = & = & & = & < & & & & & & & \\ b_0 & , & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n_0-1} & b_{n_0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underbrace{b_{n_1}}_{>0} & \cdots \end{array}}$$

Damit haben wir eine umkehrbar eindeutige Zuordnung:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\} \longleftrightarrow \{ \text{ unendliche Dezimalbrüche } \}$$

(Es ist möglich, die reellen Zahlen auf diese Weise einzuführen. Man muss sich dann allerdings überlegen, wie man mit unendlichen Dezimalbrüchen rechnet.)

Abzählbare und nicht abzählbare Mengen

Wir können jetzt zeigen, dass die Menge $\mathbb{R}$ „wesentlich größer“ ist als $\mathbb{Q}$.

Definition.

1. Eine Menge M heißt *endlich* (n-elementig), wenn sie in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\{a_1, \ldots, a_n\}$$

   d.h. wenn es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung $\{1, \ldots, n\} \leftrightarrow M$ gibt.

2. Eine Menge M heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\{a_1, a_2, \ldots\}$$

   d.h. wenn es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung $\mathbb{N} \leftrightarrow M$ gibt.

3. Alle anderen Mengen heißen *überabzählbar* oder *nicht abzählbar*.

Beispiele abzählbarer Mengen

1. Beispiel:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \quad (a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \ldots)$$

2. Beispiel:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \ldots\} \quad (a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ \ldots)$$

3. Beispiel: Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & & & & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & \\
1 & \to & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \to & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \to & \frac{1}{6} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
-1 & & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{3} & & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{5} & & -\frac{1}{6} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
2 & & \cancel{\frac{2}{2}} & & \frac{2}{3} & & \cancel{\frac{2}{4}} & & \frac{2}{5} & & \frac{2}{6} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
-2 & & \cancel{-\frac{2}{2}} & & -\frac{2}{3} & & \cancel{-\frac{2}{4}} & & -\frac{2}{5} & & -\frac{2}{6} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & \\
3 & & \frac{3}{2} & & \cancel{\frac{3}{3}} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{6} & & \cdots \\
\vdots & \swarrow & \vdots & \nearrow & \vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Damit erhält man:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = \tfrac{1}{2},\ a_4 = -1,\ a_5 = 2,$$
$$a_6 = -\tfrac{1}{2},\ a_7 = \tfrac{1}{3},\ a_8 = \tfrac{1}{4},\ a_9 = -\tfrac{1}{3},\ a_{10} = -2,\ \ldots$$

Zwei Sätze über abzählbare Mengen

Satz. Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar (bzw. jede Obermenge einer nicht abzählbaren Menge ist nicht abzählbar).

Beweis. Man nimmt die „Abzählung“ der großen Menge, die in der kleineren Menge fehlenden Elemente werden gestrichen. □

Satz. $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $(0, 1]$ nicht abzählbar ist. Dafür genügt es zu zeigen: Ist A eine abzählbare Teilmenge von $(0, 1]$, so ist $A \neq (0, 1]$. Sei also:

$$A = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset (0, 1]$$
$$\text{wobei } x_j = 0{,}b_{j1}b_{j2}b_{j3}\ldots \text{ mit } b_{jk} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

Wir konstruieren ein

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

das in der Abzählung nicht enthalten ist. Dazu sei:

$$a_k := 5 \text{ falls } b_{kk} \neq 5 \text{ und } a_k := 4 \text{ falls } b_{kk} = 5$$

Wäre $x = x_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so müsste $a_k = b_{kk}$ gelten. Dies steht im Widerspruch zur Konstruktion von a_k. $\square$

Kapitel 4

Konvergenzkriterien

Ein $x \in \mathbb{R}$ heißt ein *Häufungspunkt* (H.P.) der Folge (x_n), wenn eine Teilfolge (x_{n_k}) existiert mit $x_{n_k} \to x$.

Satz.

(a) Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

(b) Eine beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nur einen Häufungspunkt hat.

Beweis.

(a) Nach (*iii*) des obigen Satzes enthält jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge, der Limes dieser Folge ist ein Häufungspunkt.

(b) konvergent $\Rightarrow$ Ab einem $n_0(\varepsilon)$ liegen alle x_n in $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, d.h. es gibt keinen weiteren Häufungspunkt.

nicht konvergent $\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ so, dass ∞-viele x_n außerhalb $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ liegen. Diese haben also einen Häufungspunkt $\neq x$.

□

Eine beschränkte Folge kann auch mehrere Häufungspunkte haben, z.B. hat $x_n = (-1)^n$ die Häufungspunkte ± 1. – Die unbeschränkte Folge $x_n = n$ hat *keinen* Häufungspunkt. – Dagegen hat die ebenfalls unbeschränkte Folge

$$(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots)$$

den Häufungspunkt 0.

Für Folgen haben wir als Konvergenzkriterien das *Cauchysche Konvergenzkriterium* und das *Monotonieprinzip.* Wir beweisen nun einige sehr wichtige Konvergenzkriterien für Reihen.

Satz. Sei $x_n \geq 0$. $\sum x_n$ ist genau dann konvergent, wenn die Partialsummenfolge

$$s_m := \sum_{n=1}^{m} x_n$$

beschränkt ist.

Beweis. (s_m) ist nichtfallend. Monotonieprinzip. □

Majoranten- oder Vergleichskriterium

Satz. Ist $\sum y_n$ konvergent und $|x_n| \leq y_n$, so sind $\sum |x_n|$ und $\sum x_n$ konvergent (oder umgekehrt: ist $\sum x_n$ divergent mit lauter nichtnegativen Gliedern und ist $y_n \geq x_n$, so ist $\sum y_n$ divergent).

Eine Reihe $\sum x_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum |x_n|$ konvergent ist. Der obige Satz sagt u.a., dass aus „absolut konvergent“ folgt „konvergent“.

Beweis des Satzes. Seien

$$s_m := \sum_{n=1}^{m} x_n \ , \ u_m := \sum_{n=1}^{m} |x_n| \ , \ t_m := \sum_{n=1}^{m} y_n$$

(u_m) ist nicht fallend und es gilt:

$$u_m \leq t_m \leq \sum_{t=1}^{\infty} y_n \Rightarrow (u_m) \text{ ist beschränkt}$$

Mit dem Monotonieprinzip folgt, dass (u_m) konvergiert, das heißt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ ist konvergent}$$

Aus $|s_m - s_n| \leq |u_m - u_n|$ folgt, dass auch (s_n) eine Cauchyfolge ist. Also:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ ist auch konvergent}$$

□

Beispiel

$\sum \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. Denn es ist:

$$x_n = \tfrac{1}{n^2} < \tfrac{1}{n(n-1)} =: y_n \quad (\text{für } n \geq 2)$$

Wir wissen bereits, dass $\sum y_n$ konvergiert. Daraus folgt die Behauptung.

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz

Satz. Ist $\sum x_n$ konvergent, so gilt $x_n \to 0$.
Achtung. Die Umkehrung gilt nicht (vergleiche $\sum \frac{1}{n}$).

Beweis.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_0 \ \ \forall\, n, m > n_0 \quad |s_n - s_m| < \varepsilon$$

Daraus folgt:

$$|x_k| = |s_k - s_{k-1}| < \varepsilon \qquad \text{für } k \geq n_0 + 1$$

d.h. (x_k) ist eine Nullfolge □

Wurzelkriterium

Eines der wichtigsten Konvergenzkriterien ist das Wurzelkriterium.

Satz (Wurzelkriterium).

1. Wenn gilt:

$$\exists\, n_0 \text{ und } q < 1 \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{|x_n|} \leq q \quad (\text{bzw. } |x_n| \leq q^n)$$

   dann ist $\sum x_n$ absolut konvergent.

2. Ist $|x_n| \geq a > 0$ für unendlich viele n, so ist $\sum x_n$ divergent.

Beweis.

1. $|x_n| \leq q^n$ für $n \geq n_0$. Da die geometrische Reihe $\sum q^n$ konvergiert ($q < 1$, vergleiche Kapitel 2), folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

2. (x_n) ist keine Nullfolge $\Rightarrow \sum x_n$ ist divergent.

□

Quotientenkriterium

Satz (Quotientenkriterium). Sei $x_n \neq 0$ für $n \geq n_0$.

1. Wenn gilt:

$$\exists\, n_1 \geq n_0 \text{ und } q < 1 \quad \forall\, n \geq n_1 \quad \left|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q$$

   dann ist $\sum x_n$ absolut konvergent.

2. Gilt hingegen:

$$\exists\, n_2 \geq n_0 \quad \forall\, n \geq n_2 \quad \left|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$$

   dann ist $\sum x_n$ divergent.

Beweis.

1. Für $n \geq n_1$ gilt $|x_n| \leq q^{n-n_1}\,|x_{n_1}|$. Da die Reihe

$$\sum |x_{n_1}|\, q^{n-n_1} = |x_{n_1}|\, q^{-n_1} \sum q^n$$

   konvergiert, folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

2. $|x_n| \geq |x_{n_2}|$ für $n \geq n_2 \Rightarrow (x_n)$ ist nicht Nullfolge $\Rightarrow \sum x_n$ ist divergent.

□

Beispiel (Exponentialreihe)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Diese Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ (später für alle $z \in \mathbb{C}$).

Beweis. Das Wurzelkriterium ist nicht ohne Weiteres anwendbar, da wir (noch) nicht wissen, wie sich $\sqrt[n]{n!}$ verhält. Quotientenkriterium:

$$x_n = \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \text{ für } n \to \infty \text{ (und zwar für alle } x)$$

Daraus folgt:

$$\exists\, n_0 = n_0(x) \;\; \forall\, n \geq n_0 \quad \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{Konvergenz}$$

□

Folgerung. $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ für $n \to \infty$.

Beweis. $\sum \frac{x^n}{n!}$ konvergiert für alle x, d.h. $\frac{x^n}{n!} \to 0$ für alle x. Daraus folgt:

$$\frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} < 1 \text{ für } n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n!} > |x| \text{ für } n \geq n_0$$

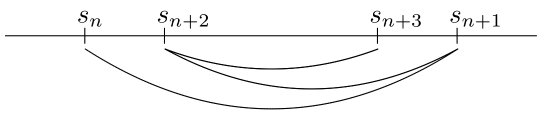
Da dies für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt $\sqrt[n]{n!} \to \infty$. □

Bemerkung. Hätten wir das früher gewusst, hätten wir oben das Wurzelkriterium anwenden können.

Leibnizkriterium für alternierende Reihen

Satz (Leibnizkriterium). Sei (x_n) *alternierend* (also $\operatorname{sgn} x_{n+1} = -\operatorname{sgn} x_n$) und sei $(|x_n|)$ eine fallende (nicht-wachsende) Nullfolge. Dann ist $\sum x_n$ konvergent (aber im Allgemeinen nicht absolut konvergent).

Beweis. Sei $s_n := \sum_{j=1}^{n} x_j$, also zum Beispiel:



Für $n, m \geq n_0$ gilt also $|s_m - s_n| \leq |x_{n_0+1}|$. Also ist (s_n) eine Cauchyfolge und somit konvergent. □

Beispiel

Die alternierende harmonische Reihe $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ ist konvergent. Wir werden später sehen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2 \approx 0{,}69$$

Verdichtungskriterium

Satz (Verdichtungskriterium). Sei $x_n \geq 0$, (x_n) fallend (nicht-wachsend). Dann gilt:

$$\sum x_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \sum 2^k x_{2^k} \text{ konvergent}$$

Bemerkung. Dieses Prinzip haben wir bereits beim Beweis der Divergenz der harmonischen Reihe benutzt.

Beweis. Sei $s_n := \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ und $t_m := \sum\limits_{k=0}^{m} 2^k x_{2^k}$.

$\Rightarrow$: $\sum x_n$ konvergent $\Rightarrow$ (s_n) konvergent, also beschränkt. Wegen

$$2^{k-1} x_{2^k} \leq \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} x_j$$

folgt, dass auch

$$t_m = \sum_{k=1}^{m} 2^k x_{2^k} = 2 \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} x_{2^k} \leq 2 \sum_{j=1}^{2^m} x_j = 2 s_{2^m}$$

beschränkt ist, d.h. die monotone Folge (t_m) ist konvergent.

$\Leftarrow$: $\sum 2^k x_{2^k}$ konvergent $\Rightarrow$ (t_m) beschränkt. Es gilt also:

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j &= x_1 + \underbrace{x_2 + x_3}_{\leq 2x_2} + \underbrace{x_4 + \ldots + x_7}_{\leq 4x_4} + \underbrace{x_8 + \ldots + x_{15}}_{\leq 8x_8} + \ldots \\ &\leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 + \ldots \\ &\leq \sum_{j=0}^{m} 2^j x_{2^j} = t_m \text{ mit } 2^m \leq n < 2^{m+1} \end{aligned}$$

Also ist (s_n) beschränkt und somit konvergent.

$\square$

Beispiele

1. Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \text{ konvergent} \Leftrightarrow s > 1$$

2. Beispiel:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s} \text{ konvergent} \Leftrightarrow s > 1$$

Dabei darf s auch nicht-ganzzahlig oder sogar nicht-rational sein, allerdings sind dann die entsprechenden Potenzen bisher nicht definiert.

Beweise.

1. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k (2^k)^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k 2^{-ks} = \sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{2^{-(s-1)}}_{q})^k$$

   Diese Reihe ist konvergent $\Leftrightarrow q < 1 \Leftrightarrow s > 1$.

2. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k 2^{-k} (\ln 2^k)^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} (\ln 2)^{-s} = (\ln 2)^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$$

   Diese Reihe ist nach Beispiel 1 konvergent $\Leftrightarrow s > 1$.

$\square$

Bemerkung. Iterativ kann man zeigen: Die Reihe

$$\sum \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n \;\cdots\; \underbrace{(\ln \cdots \ln)}_{k} n \left[\underbrace{(\ln \cdots \ln)}_{k+1} n \right]^s}$$

konvergiert genau dann, wenn $s > 1$ ist.

Kapitel 5

Stetige Funktionen

Das Hauptthema dieser Vorlesung sind *Funktionen* (Abbildungen):

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ mit } D \subset \mathbb{R} \text{ (später auch } \mathbb{C} \text{ statt } \mathbb{R})$$

$D = D_f$ ist der *Definitionsbereich* von f. Jedem $x \in D$ wird durch f ein (aber auch nur ein) $f(x) \in \mathbb{R}$ *zugeordnet*:

$$f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$$

Man kann sich z.B. folgendes vorstellen:

1. $v(t)$ = Geschwindigkeit eines Körpers zur Zeit t
2. $k(x)$ = Konzentration einer Lösung an der Stelle x (zu einem festen Zeitpunkt)
3. $k(t)$ = Konzentration einer Lösung zur Zeit t (an einer festen Stelle)
4. $T(x)$ bzw. $T(t)$ = die jeweilige Temperatur

Allgemeiner hat man z.B. $k(x, t)$ = Konzentration an der Stelle x zur Zeit t. Falls es sich bei x um einen Punkt im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ handelt, ist dies eine Funktion von $3 + 1 = 4$ Variablen. Das wird erst im zweiten Semester behandelt.

Der *Graph* einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist:

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in D\}$$

Diese „graphische Darstellung“ einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($d \subset \mathbb{R}$) ist eine häufig sehr nützliche Veranschaulichung einer Funktion.

Einfachste Beispiele

1. Beispiel:

   Die *konstante Funktion*.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

2. Beispiel:

   Die *identische Funktion* (Abkürzung: id = $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$).

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

3. Beispiel:

   Die *Betragsfunktion* (Abkürzung: abs für Absolutbetrag).

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

4. Beispiel:

   Größtes Ganzes oder *Gauss-Klammer* (Abkürzung: int für integer).

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = [x] \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ wobei } [x] := \max\{t \in \mathbb{Z} \,:\, t \leq x\}$$

5. Beispiel:

   Die *Quadratwurzel* (Abkürzung: sqrt für square-root).

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \ _+\sqrt{x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+ \text{ mit } \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$$

6. Beispiel:

   Polynome.

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

   Dabei wird $a_n \neq 0$ angenommen. p heißt dann ein Polynom vom *Grad* n, a_n der *höchste Koeffizient.*

7. Beispiel:

   Rationale Funktionen. Seien p, q Polynome (mit $q \not\equiv 0$).

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, q(x) \neq 0\},\ r : D \to \mathbb{R},\ r(x) = \tfrac{p(x)}{q(x)} \text{ für } x \in D$$

8. Beispiel:

   Dirichletfunktion (interessant als Beispiel und Gegenbeispiel).

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational ist} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational ist} \end{cases}$$

   Natürlich kann man den Graphen der Dirichletfunktion nicht zeichnen.

Konstruktionsprinzipien

Mit den folgenden einfachen *Konstruktionsprinzipien* kann man aus den bekannten Funktionen neue Funktionen konstruieren (auf diese Weise lassen sich sehr viele Funktionen aus ganz wenigen einfachen Funktionen aufbauen). Wir werden immer wieder darauf zurückkommen.

Seien $f : D_f \to \mathbb{R},\ g : D_g \to \mathbb{R}$ Funktionen (wobei $D_f, D_g \subset \mathbb{R}$).

1. *Produkt mit einem Skalar* λ ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\lambda f :\ D_{\lambda f} := D_f,\ (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

2. *Summe* von f und g:

$$f + g :\ D_{f+g} := D_f \cap D_g,\ (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

3. *Produkt* von f und g:

$$fg :\ D_{fg} := D_f \cap D_g,\ (fg)(x) := f(x)g(x)$$

4. *Quotient* von f und g:

$$\tfrac{f}{g} :\ D_{\frac{f}{g}} := \{x \in D_f \cap D_g\ :\ g(x) \neq 0\},\ \tfrac{f}{g}(x) := \tfrac{f(x)}{g(x)}$$

5. *Komposition* oder *Zusammensetzung* (Hintereinanderausführung) von f und g:

$$f \circ g :\ D_{f \circ g} := \{x \in D_g\ :\ g(x) \in D_f\},\ (f \circ g)(x) := f(g(x))$$

Offenbar gilt: Polynome und rationale Funktionen lassen sich mit Hilfe der Konstruktionsprinzipien 1 bis 4 aus der konstanten Funktion und der identischen Funktion aufbauen. Außerdem:

$$\mathrm{abs}(x) = \sqrt{x^2} = (\mathrm{sqrt} \circ q)(x) \text{ mit } q(x) = x^2$$

Grenzwert von Funktionen

Ein ganz wichtiger Begriff ist der *Grenzwert von Funktionen*. Der Punkt a heißt ein *Berührungspunkt* von D, wenn es eine Folge (x_n) aus D gibt mit $x_n \to a$ oder:

$$\text{wenn } \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, x_\varepsilon \in D \text{ mit } |x - x_\varepsilon| < \varepsilon \text{ (Beweis?)}$$

Offenbar ist jeder Punkt aus D Berührungspunkt von D. Das Intervall $(0,1)$ hat, abgesehen von allen Punkten aus $(0,1)$, die Berührungspunkte 0 und 1.

Definition (Grenzwert einer Funktion). Sei $D \subset \mathbb{R}$, a Berührungspunkt von D, $f : D \to \mathbb{R}$. Wir definieren den Grenzwert der Funktion f für x gegen a:

$$A = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) :\Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0\ \ \forall\, x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta\quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Bemerkung. Ist $a \in D$ und existiert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, so ist notwendig:

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Weitere naheliegende Begriffe sind:

1. *Rechtsseitiger Grenzwert.*
$$\lim_{x \searrow a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D,\ x > a}}$$
2. *Linksseitiger Grenzwert.*
$$\lim_{x \nearrow a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D,\ x < a}}$$
3. Außerdem:
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \ :\Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, K \ \ \forall\, x \in D, x > K \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \ :\Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, K \ \ \forall\, x \in D, x < K \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Folgencharakterisierung des Grenzwerts

Satz. $\lim\limits_{x \to a} = A \Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) aus D mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to A$.

Es wird sich zeigen, dass in vielen Fällen diese Folgencharakterisierung der Grenzwerte besonders bequem zu handhaben ist.

Beweis.

$\Rightarrow$: Sei (x_n) aus D mit $x_n \to a$. Wegen $A = \lim\limits_{x \to a}$ gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \ \forall\, x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Wegen $x_n \to a$ existiert zu diesem δ ein n_0 mit:

$$\exists\, n_0 \ \ \forall\, n \geq n_0 \quad |x_n - a| < \delta$$

$$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_0 \ \ \forall\, n \geq n_0 \quad |x_n - A| < \varepsilon$$

d.h. es gilt $f(x_n) \to a$.

$\Leftarrow$: *Annahme.* Es gilt nicht $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Daraus folgt:

Die Verneinung von:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \ \forall\, x \in D, |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Also:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, \delta > 0 \ \ \exists\, x \in D, |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ für dieses ε gilt $\forall\, n \in \mathbb{N} \ \ \exists\, x_n \in D, |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \exists\, (x_n)$ aus D mit $x_n \to a$, aber $f(x_n) \not\to A$.

Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung.

$\square$

Stetigkeit

Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. f heißt *stetig bei* a, wenn gilt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Da $a \in D$ ist, ist dies gleichbedeutend mit der Existenz des Limes oder mit:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq q}} f(x) = f(a)$$

f heißt *stetig*, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Beispiele

1. Beispiel:

$$f(x) = c,\ x,\ x^2,\ \ldots \quad \text{allgemeine Polynome}$$

   Daraus folgt:

$$\forall\ a \in \mathbb{R} \text{ gilt } \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

   Insbesondere sind alle diese Funktionen stetig.

2. Beispiel:

$$f(x) = [x] \quad \text{größtes Ganzes}$$

   $\lim\limits_{x \to n} f(x)$ existiert nicht für alle $n \in \mathbb{Z}$, aber:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \nearrow n} f(x) = n - 1 \neq n = f(n) \\ \lim\limits_{x \searrow n} f(x) = n = f(n) \end{array}\right\} \forall\ n \in \mathbb{Z}$$

   Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

3. Beispiel:

$$f(x) := \sin \tfrac{1}{x} \text{ für } x \neq 0,\ f(0) := 0$$

   Es wird davon ausgegangen, dass die Sinusfunktion hinreichend bekannt ist. Die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} f(x),\ \lim_{x \nearrow 0} f(x),\ \lim_{x \searrow 0} f(x),\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x)$$

   existieren nicht.

Die obige Folgenabschätzung des Grenzwerts liefert sofort:

Satz. Es gilt:

f stetig in a

$\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in D, |x-a| < \delta \quad |f(x) - f(0)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) aus D mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$

Insbesondere:

$\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in D \setminus \{a\}, |x-a| < \delta \quad |f(x) - f(0)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) aus $D \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$

Die konstante Funktion und die identische Funktion $\mathrm{id}(x) = x$ sind offenbar stetig. Für Polynome und rationale Funktionen folgt dies sofort aus dem folgenden Satz.

Satz. Sind

$$f : D_f \to \mathbb{R} \text{ und } g : D_g \to \mathbb{R} \text{ stetig (in } a \in D_f \cap D_g)$$

und ist $c \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$cf,\;\; f + g \text{ und } f \cdot g \text{ sind stetig (in } a)$$

Ist außerdem $g(a) \neq 0$, so gilt auch:

$$\tfrac{f}{g} \text{ ist stetig (in } a)$$

Beweis. Dies folgt sofort aus der obigen Folgencharakterisierung der Stetigkeit und den entsprechenden Sätzen über konvergente Folgen. □

Entsprechend gilt für die Hintereinanderausführung:

Satz. Sei

$$f : D_f \to \mathbb{R} \text{ stetig in } a \in D_f,\; f(a) \in D_g \text{ und } g : D_g \to \mathbb{R} \text{ stetig in } f(a)$$

Dann gilt:

$$g \circ f \text{ ist stetig in a.}$$

Beweis. Sei (x_n) aus $D_{g \circ f} \subset D_g$ (also $x_n \in D_f, f(x_n) \in D_g$) mit $x_n \to a$.

$$\Rightarrow f(x_n) \to f(a) \text{ (da } f \text{ stetig in } a)$$
$$\Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(a)) \text{ (da } g \text{ stetig in } f(a))$$

d.h. $g \circ f$ ist stetig in a.

□

Weitere Beispiele

1. Beispiel: abs ist stetig.

   (a) Fall: $a = 0$. Es gilt:

   $$x_n \to 0 \Rightarrow |x_n| \to 0 \Rightarrow \mathrm{abs}(x_n) = |x_n| \to 0 = \mathrm{abs}(0)$$

   (b) Fall: $a > 0$. In diesem Falle ist $\mathrm{abs}(x) = x$, also stetig.

(c) Fall: $a < 0$. In diesem Falle ist $\mathrm{abs}(x) = -x$, also stetig.

2. Beispiel:

$$f \text{ stetig} \Rightarrow |f| \text{ stetig (wobei } |f|(x) := |f(x)|)$$

Beweisidee. $|f|$ ist Hintereinanderausführung von f und *abs*.

3. Beispiel:

$$\begin{gathered} \text{int ist unstetig in allen } a \in \mathbb{Z}, \\ \text{aber stetig in allen } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{gathered}$$

Vergleiche weiter oben ...

4. Beispiel: Die *Dirichletfunktion*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt stetig.

Beweis.

(a) Fall: a rational. Es existiert eine Folge irrationaler Zahlen (x_n) mit $x_n \to a$ (ist z.B. (y_n) eine Folge rationaler Zahlen mit $y_n \to \sqrt{2}$, so ist $x_n := a + (\sqrt{2} - y_n)$ irrational mit $x_n \to a$). Es gilt:

$$f(x_n) = 0 \not\to 1 = f(a)$$

(b) Fall: a irrational. Es existiert eine Folge rationaler Zahlen (x_n) mit $x_n \to a$ (z.B. für $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ sei $x_n = a_0, a_1 \ldots a_n$). Es gilt:

$$f(x_n) = 1 \not\to 0 = f(a)$$

□

5. Beispiel: Die etwas modifizierte Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

ist stetig in allen irrationalen Punkten, aber unstetig in allen rationalen Punkten.

Beweis.

(a) Fall: a rational. Es existiert (x_n) irrational mit $x_n \to a$. Daraus folgt:

$$f(x_n) = 0 \not\to f(a) \neq 0$$

(b) Fall: a irrational. Es ist zu zeigen:

Ist (x_n) eine Folge rationaler Zahlen mit $x_n \to a$ und

$$x_n = \frac{p_n}{q_n} \text{ (wobei } p_n \text{ und } q_n \text{ teilerfremd)}$$

so gilt $q_n \to \infty$.

Annahme: $q_n \not\to \infty$, d.h. q_n enthält eine beschränkte Teilfolge (q_{n_k}). Da die Folge (x_n) beschränkt ist, folgt daraus die Beschränktheit der Folge (p_{n_k}). Das bedeutet aber, dass in der Folge (x_{n_k}) nur endlich viele verschiedene Zahlen vorkommen (da es nur endlich viele Zähler und Nenner gibt). Der Grenzwert der Folge (x_{n_k}) – der natürlich gleichzeitig der Grenzwert der Folge (x_n) – ist also gleich einer dieser rationalen Zahlen, also:

$$a = \tfrac{p}{q}$$

Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass a irrational ist.

$\square$

Kapitel 6

Grundlegendes über stetige Funktionen

Zwischenwertsatz

Der folgende Satz ist anschaulich offensichtlich:

Satz (Zwischenwertsatz). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $f(a) < f(b)$ (oder $f(a) > f(b)$). Dann gibt es zu jedem c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (mindestens) ein $x_0 \in (a, b)$ mit:

$$f(x_0) = c$$

Beweis. Sei o.E. $f(a) < f(b)$, $M := \{x \in [a, b] \ : \ f(x) < c\}$. Offenbar ist $a \in M$, also $M \neq \emptyset$. Außerdem ist M nach oben beschränkt (b ist obere Schranke). Sei $x_0 := \sup M$ (dieses existiert nach dem Supremumsprinzip).

$$\Rightarrow \exists \ (x_n) \text{ aus } M \text{ mit } x_n \to x_0$$

$$\Rightarrow \text{(da } f \text{ stetig ist) } f(x_0) = \lim f(x_n) \leq c, \text{ da } f(x_n) < c \text{ für alle } n \text{ gilt}$$

Andererseits ist $f(x_0 + \frac{1}{n}) \geq c$, da $x_0 + \frac{1}{n} \notin M$ gilt. Daraus folgt:

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(x_0 + \tfrac{1}{n}) \geq c$$

und somit insgesamt:

$$f(x_0) = c$$

Wegen $f(a) < c < f(b)$ ist $x_0 \neq a$ und $x_0 \neq b$, also $x_0 \in (a, b)$.

□

Ein einfacher Fixpunktsatz

Satz. Ist $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig, so existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

Beweis. Sei $g(x) := f(x) - x$. Es gilt:

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \text{ und } g(b) = f(b) - b \leq 0$$

Der Wert 0 ist also ein Zwischenwert von g, und da g stetig ist, existiert ein x_0 mit $g(x_0) = 0$. Daraus folgt:

$$f(x_0) = x_0$$

□

Anwendung

Damit ist eine einfacche *Anwendung* möglich.

Satz. Ist p ein Polynom ungeraden Grades, so hat p mindestens eine (reelle) Nullstelle x_0, d.h. $p(x_0) = 0$.

Anmerkung. Das gilt im Allgemeinen nicht für Polynome geraden Grades:

$$p(x) \equiv 1, \; p(x) = x^2 + 1, \; \ldots$$

Beweis. Sei

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \; n \text{ ungerade}, \; a_n \neq 0$$

Im Folgenden sei o.E. $a_n > 0$ (entsprechend für $a_n < 0$). Daraus folgt:

$$p(x) = x^n \sum_{j=0}^{n} a_j x^{j-n} = x^n (\underbrace{a_0 x^{-n} + a_1 x^{1-n} + \ldots + a_n}_{\geq \frac{1}{2} a_n \text{ (für große } x)}) \longrightarrow \infty \text{ für } x \to \infty$$

Entsprechend folgt $p(x) \longrightarrow -\infty$ für $x \to -\infty$. Also existieren:

$$a \in \mathbb{R} \text{ mit } p(a) < 0 \text{ und } b \in \mathbb{R} \text{ mit } p(b) > 0$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $x_0 \in (a, b)$ mit $p(x_0) = 0$.

□

Definition. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn ein K existiert mit:

$$|f(x)| \leq K \text{ für alle } x \in D$$

Entsprechend definiert man *nach oben* bzw. *nach unten beschränkt.* Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *nimmt in $x_0 \in D$ ihr Maximum an*, wenn gilt:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ für alle } x \in D$$

Entsprechend nimmt sie ihr *Minimum*, falls $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D$. Das Maximum (bzw. Minimum) heißt *strikt*, falls:

$$f(x) < f(x_0) \text{ bzw. } f(x) > f(x_0) \text{ für alle } x \in D \setminus \{x_0\}$$

Bemerkung. Nicht in jedem Fall nimmt eine stetige Funktion ihr Maximum oder Minimum an.

Beispiele

1. id : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat kein Minimum oder Maximum (sie ist nach oben und unten unbeschränkt).
2. id : $[0,1] \to \mathbb{R}$ hat Minimum und Maximum.
3. id : $[0,1) \to \mathbb{R}$ hat Minimum, aber kein Maximum.
4. $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ q(x) = x^2$ hat Minimum, aber kein Maximum.

Satz vom Maximum

Satz. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt sein Maximum und sein Minimum an.

Beweis. Annahme: f ist unbeschränkt. Dann gilt:

$$\exists\ (x_n) \text{ aus } [a,b] \text{ mit } |f(x_n)| \geq n$$

Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) und ein $x_0 \in [a,b]$ mit $x_{n_k} \to x_0$ und $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. Dies steht im Widerspruch zu $|f(x_{n_k})| \geq n_k$.

Also ist die Bildmenge $\{f(x) : x \in [a,b]\}$ beschränkt. $\{f(x) : x \in [a,b]\}$ besitzt also ein Supremum und:

$$\exists\ (x_n) \text{ aus } [a,b] \text{ mit } f(x_n) \to \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} =: \sup f$$

Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) mit:

$$x_{n_k} \to x_t \text{ und somit } f(x_t) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \sup f$$

f nimmt also sein Maximum an. Entsprechend zeigt man die Annahme des Minimums.

□

Folgerung. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\exists\ c > 0 \text{ mit } |f(x)| \geq c \text{ für alle } x \in [a,b]$$

Beweis. $|f|$ ist stetig. Sei $c := \min|f|$, d.h. $\exists\ x_0$ mit $c = \min|f| = |f(x_0)| > 0$. Es gilt:

$$|f(x)| \geq \min|f| = c \text{ für alle } x \in [a,b]$$

□

Umkehren einer Abbildung

Kann man eine Abbildung umkehren? Offensichtlich nicht in jedem Fall: Zwar ist jedem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit eines Körpers zuordenbar, aber im Allgemeinen gibt es zu einer Geschwindigkeit mehrere Zeitpunkte, zu denen diese angenommen wird.

Definition. Eine Abbildung (Funktion) $f : A \to B$ heißt *injektiv* (umkehrbar), wenn gilt:

$$\text{Aus } x \neq y \text{ folgt } f(x) \neq f(y)$$
$$\text{(oder: aus } f(x) = f(y) \text{ folgt } x = y\text{)}$$

Satz. Eine reelle Funktion f ist sicher dann injektiv, wenn gilt:

$$f \text{ ist } \textit{streng wachsend}, \text{ d.h. } x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

oder:

$$f \text{ ist } \textit{streng fallend}, \text{ d.h. } x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

oder ganz allgemein:

$$f \text{ ist streng monoton}$$

Der *Beweis* ist offensichtlich.

Definition. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt *surjektiv (auf)*, wenn gilt:

$$B \overset{!}{=} f(A) = \{f(x) \, : \, x \in A\}$$

f heißt *bijektiv*, wenn es injektiv und surjektiv ist.

Satz. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (wachsend oder fallend), $A := f(a)$, $B := f(b)$. Dann bildet f das Intervall $[a,b]$ bijektiv auf $[A,B]$ bzw. $[B,A]$ ab. Die *Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : [A,B] \to [a,b] \text{ bzw. } [B,A] \to [a,b]$$
$$\text{mit } y \mapsto x \text{ falls } f(x) = y$$

ist ebenfalls stetig und streng monoton (wachsend bzw. fallend, wie f).

Beweis. Sei o.E. f streng wachsend. Aus $a < x < b$ folgt $A < f(x) < B$, also insbesondere $A < B$. Wegen der strengen Monotonie ist f injektiv. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass f jeden Wert zwischen A und B annimmt, d.h. $f : [a,b] \to [A,B]$ ist surjektiv (also bijektiv), f^{-1} existiert.

1. *Strenge Monotonie* von f^{-1}. Sei $Y < Z$. Wäre $f^{-1}(Y) \geq f^{-1}(Z)$, so würde aus der Monotonie von f folgen:

   $$Y = f(f^{-1}(Y)) \geq f(f^{-1}(Z)) = Z$$

   Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

2. *Stetigkeit* von f^{-1}.

   (a) *Behauptung.* $Y_n \searrow Y_0 \Rightarrow f^{-1}(Y_n) \to f^{-1}(Y_0)$

   Beweis. $(f^{-1}(Y_n))$ ist fallend und beschränkt, $f^{-1}(Y_n) \geq f^{-1}(Y_0)$. Daraus folgt, dass $(f^{-1}(Y_n))$ konvergent ist gegen ein $x_0 \in [a,b]$. Also:

   $$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(f^{-1}(Y_n)) = \lim_{n\to\infty} Y_n = Y_0, \; f^{-1}(Y_0) = x_0$$

   d.h. $f^{-1}(Y_n) \to f^{-1}(Y_0)$. $\square$

(b) *Behauptung.* $Y_n \nearrow Y_0 \Rightarrow f^{-1}(Y_n) \to f^{-1}(Y_0)$

Beweis. Entsprechend ...

(c) Sei jetzt (Y_n) eine beliebige Folge aus $[A, B]$ mit $Y_n \to Y_0$. Aus (a) und (b) folgt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } f^{-1}(Y_0) - f^{-1}(Y_0 - \tfrac{1}{k_0}) < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ und}$$
$$f^{-1}(Y_0 + \tfrac{1}{k_0}) - f^{-1}(Y_0) < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

außerdem:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq n_0 \quad |Y_n - Y_0| < \tfrac{1}{k_0}$$

Mit der Monotonie von f^{-1} folgt daraus:

$$\begin{aligned} &\left|f^{-1}(Y_n) - f^{-1}(Y_0)\right| \\ \leq\; &\left|f^{-1}(Y_0 + \tfrac{1}{k_0}) - f^{-1}(Y_0)\right| + \left|f^{-1}(Y_0) - f^{-1}(Y_0 - \tfrac{1}{k_0})\right| < \varepsilon \end{aligned}$$

d.h. $f^{-1}(Y_n) \to f^{-1}(Y_0)$.

□

Der Satz gilt entsprechend für beliebige Intervalle:

Satz. Sei $\mathcal{J}$ ein beliebiges (offen, abgeschlossen, halboffen, Halbachse, ...) Intervall, $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann ist:

$$f(\mathcal{J}) = \{f(x) \,:\, x \in \mathcal{J}\}$$

ebenfalls ein Intervall $\mathcal{I}$, $f : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ ist bijektiv, $f^{-1} : \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ ist stetig und streng monoton.

Beweis. Es existieren Intervalle $\mathcal{J}_n = [a_n, b_n]$ mit $\mathcal{J} = \cup \mathcal{J}_n$ (z.B. falls $\mathcal{J} = [a, b)$ ist mit $b < \infty$, wähle $\mathcal{J}_n = [a, b - \frac{1}{n}]$ als Folge von Intervallen).

Die *Einschränkung* $f_n : \mathcal{J}_n \to \mathbb{R}$ von f auf $\mathcal{J}_n$ ist natürlich stetig und streng monoton. Nach obigem Satz gilt also:

$$f_n : \mathcal{J}_n \to f(\mathcal{J}_n) =: \mathcal{I}_n \text{ bijektiv, } \mathcal{I} = \cup \mathcal{I}_n$$

f_n^{-1} ist also stetig und streng monoton auf $\mathcal{I}_n$. Andererseits ist f_n^{-1} die Einschränkung von f^{-1} (man beachte, dass f^{-1} wegen der strengen Monotonie von f jedenfalls existiert) auf $\mathcal{I}_n$, d.h. die Einschränkung von f^{-1} auf jedes der $\mathcal{I}_n$ ist stetig und streng monoton, dies gilt dann auch für f^{-1}.

□

Beispiel

Als Beispiel betrachten wir die *Wurzelfunktionen*.

$$\sqrt[k]{\cdot} \quad (k\text{-te Wurzel})$$

$\sqrt[k]{x}$ soll die (?) Zahl sein, für die die k-te Potenz gleich x ist. Das ist offenbar die Umkehrfunktion von:

$$f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_k(x) = x^k \quad (k \in \mathbb{N},\ k \geq 2)$$

f_k ist stetig und streng wachsend, f_k bildet $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f_k^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ &\text{ ist stetig und streng wachsend,} \\ f_k^{-1}(y) = \sqrt[k]{y} &\text{ die } k\text{-te Wurzel.} \end{aligned}$$

Ist k *gerade*, so ist auch $-\sqrt[k]{y}$ eine k-te Wurzel. Wenn nichts weiter gesagt wird, ist die positive Wurzel gemeint.

Ist k *ungerade*, so ist auch:

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k \text{ stetig und streng wachsend}$$

f_k ist bijektiv, f_k^{-1} stetig und streng monoton wachsend. (Die k-te Wurzel aus einer positiven/negativen Zahl ist positiv/negativ).

Kapitel 7

Exponentialfunktion und Logarithmus

Ziel der nächsten beiden Abschnitte ist es, für alle $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ den Ausdruck a^x zu erklären. Da wir $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ für $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$ kennen, könnten wir so vorgehen, dass wir eine Folge:

$$\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \text{ mit } \frac{p_n}{q_n} \to x$$

wählen und zeigen, dass dann:

$$\left(a^{\frac{p_n}{q_n}}\right)$$

eine Cauchyfolge ist. Das ist möglich, wir wählen aber einen anderen Weg.

Die Exponentialfunktion

Wir wissen bereits: Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ (Quotientenregel). Damit definieren wir:

Definition (Exponentialfunktion).

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Der Funktionswert an der Stelle 1

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots \sim 2{,}7182818284$$

heißt die *Eulersche Zahl*. Es wird sich zeigen, dass $\exp(x) = e^x$ gilt.

Satz. e ist irrational (tatsächlich ist e sogar *transzendent*, d.h. nicht algebraisch, also nicht Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten).

Beweis. Annahme: $e = \frac{p}{q}$ (o.E. $q \geq 2$, da nicht notwendig gekürzt). Dann gilt:

$$\underbrace{q!e}_{\text{ganzzahlig}} = q! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \underbrace{q! \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}}_{\text{ganzzahlig}} + \underbrace{\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots + \frac{1}{(q+1)\cdots(q+m)} \right)}_{\Rightarrow \text{ auch ganzzahlig}}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{q+1} \leq \frac{1}{q+1} \left(1 + \frac{1}{q+2} + \ldots + \frac{1}{(q+2)\cdots(q+m)} \right) \\ &< \frac{1}{q+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} \right) < \frac{1}{q+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{2}{q+1} \leq \frac{2}{3} \quad (\text{da } q \geq 2) \end{aligned}$$

Das ist im Widerspruch zur Ganzzahligkeit des Grenzwertes.

□

Gelegentlich wir es nötig abzuschätzen, wie gut die Reihe $\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$ die Zahl $\exp(x)$ approximiert.

Satz (Restgliedabschätzung). Für

$$|x| \leq 1 + \frac{N}{2} = \frac{N+2}{2}$$

gilt:

$$\left| \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Speziell gilt:

$$\left| \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \right| \leq \frac{2}{(N+1)!}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \left| \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \\ &= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \ldots \right) \\ &\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)^2} + \ldots \right) \\ &\quad \text{wegen } \frac{|x|}{N+2} \leq \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \right) = 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \end{aligned}$$

□

Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Das nächste wichtige Ziel ist der Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Satz. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Zum Beweis benötigen wir den folgenden Satz.

Satz (Cauchy-Produkt unendlicher Reihen). Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergent und sei:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \quad \left(= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n_1+n_2=n} a_{n_1} b_{n_2} \right)$$

Dann ist $\sum c_n$ absolut konvergent und es gilt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Beweis. Sei

$$C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k, \; C_n^\star := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right)$$

Es gilt also:

$$C_n^\star \to \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

Es genügt also zu zeigen, dass $C_n^\star - C_n \to 0$ gilt. Wegen:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i = \sum_{i+k \leq n} a_i b_k$$

$$C_n^\star = \sum_{i,k \leq n} a_i b_k$$

gilt:

$$C_n^\star - C_n = \sum_{i,k} a_i b_k$$

wobei:
$0 \leq i, k \leq n$
$i + k > n$

Also:

$$|C_n^\star - C_n| \leq \sum |a_i|\,|b_k|$$

In jedem Term mindestens:
$i > \frac{n}{2}$ oder $k > \frac{n}{2}$

$$\leq \underbrace{\sum_{i > \frac{n}{2}} |a_i|}_{\to 0} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|}_{=:B} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|}_{=:A} \underbrace{\sum_{k > \frac{n}{2}} |b_k|}_{\to 0}$$

$$\to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Außerdem gilt:

$$|c_k| \leq \sum_{i+j=k} |a_i| \, |b_j| =: \tilde{c}_k$$

wobei die $\tilde{c}_k$ mit Hilfe der $|a_i|$ und $|b_j|$ genauso gebildet werden wie c_k mit Hilfe der a_i und b_j. Die obige Argumentation liefert die Konvergenz der Reihe $\sum \tilde{c}_k$, daraus folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum c_k$.

□

Beweis der Funktionalgleichung. Anwendung des Cauchy-Produkts auf die (absolut konvergenten) Reihen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ und } \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

liefert:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

also:

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y)$$

□

Grundlegende Eigenschaften der Exponentialfunktion

Damit ergeben sich sofort einige *grundlegende Eigenschaften* der Exponentialfunktion:

1. $\exp(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
2. $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
3. $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$
4. $\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p}$

Diese Eigenschaften legen es nahe, die Funktion als Exponentialfunktion zu bezeichnen.

Beweis der Eigenschaften.

1. Folgt aus $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$.
2. Für $x \geq 0$ ist:

   $$\exp(x) = \sum \frac{x^n}{n!} > 0$$

   Für $x < 0$ ist:

   $$\exp(x) = \frac{1}{exp(-x)} > 0 \quad (\text{da } \exp(-x) > 0 \text{ ist})$$

3. $n = 1: \quad \exp(1) = e$ (nach Definition).

   $n \Rightarrow n+1: \quad \exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}$.

   Außerdem gilt:

$$\exp(0) = 1 = e^0 \text{ und } \exp(-n) = \tfrac{1}{\exp(n)} = \tfrac{1}{e^n} = e^{-n}$$

4. $\left(\exp\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q = \exp\left(\frac{p}{q}q\right) = \exp(p) = e^p$, also $\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p}$.

□

Nun ist leicht die Stetigkeit von exp zu beweisen.

Satz. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis.

(a) *Behauptung.* exp ist *stetig bei* 0.

Die obige Abschätzung liefert (für $N = 0$, also $|x| < 1$):

$$|\exp(x) - 1| \leq 2\tfrac{|x|^{0+1}}{(0+1)!} = 2\,|x| \to 0 \text{ für } x \to 0$$

(b) *Behauptung.* exp ist stetig bei x_0.

$$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(x_0)| &= |\exp(x_0)(\exp(x - x_0) - 1)| \\ &= \exp(x_0)\underbrace{|\exp(x - x_0) - 1|}_{\to 0} \to 0 \text{ für } x \to x_0 \end{aligned}$$

□

Es handelt sich also bei der Exponentialfunktion um eine *stetige Fortsetzung* der Abbildung:

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ \tfrac{p}{q} \to e^{\frac{p}{q}}$$

auf ganz $\mathbb{R}$. Wir zeigen, dass exp streng monoton und somit umkehrbar ist.

Satz. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $(0, \infty)$ ab. Die Umkehrfunktion:

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad \text{natürlicher Logarithmus}$$

ist ebenfalls stetig und streng wachsend. Es gilt die *Funktionalgleichung des Logarithmus*:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \text{ für alle } x, y > 0$$

Beweis.

(a) *Behauptung.* exp ist streng wachsend.

Für $y > x$ gilt $y - x > 0$, also:

$$\exp(y) = \exp(x + (y - x)) = \underbrace{\exp(x)}_{>0} \underbrace{\exp(\underbrace{y - x}_{>0})}_{>1} > \exp(x)$$

(b) $\exp(n) = e^n \to \infty$, $\exp(-n) = \frac{1}{e^n} \to 0$. Nach dem Zwischenwertsatz ist also $(0, \infty) \subset \exp(\mathbb{R})$. Daraus folgt:

$$(0, \infty) = \exp(\mathbb{R})$$

(c) Sei $x = \exp(a)$, $y = \exp(b)$ (also $a = \ln(x)$, $b = \ln(y)$). Dann gilt:

$$\ln(xy) = \ln(\exp(a)\exp(b)) = \ln(\exp(a + b)) = a + b = \ln(x) + \ln(y)$$

$\square$

Kapitel 8

Die allgemeine Potenz

Formal gilt (was wir aber bisher nur für rationale x kennen):

$$a^x = [\exp(\ln a)]^x = \exp(x \ln a)$$

Dies veranlasst uns dazu, die *Exponentialfunktion zur Basis a* (wobei $a > 0$) wie folgt zu definieren:

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exp_a(x) := \exp(x \ln a)$$

Die Funktion hat tatsächlich alle von a^x erwarteten Eigenschaften (man schreibt deshalb auch a^x).

Satz. $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (genauer $\mathbb{R} \to (0, \infty)$) ist stetig mit:

(a) $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$

(b) $\exp_a(n) = a^n$

(c) $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus der allgemeinen Regel für zusammengesetzte Funktionen:

$$\exp_a = \exp \circ m_{\ln a} \quad (\text{mit } m_{\ln a} = \text{Multiplikation mit } \ln a)$$

Nun gilt:

(a) $\exp_a(x+y) = \exp((x+y)\ln a) = \exp(x \ln a)\exp(y \ln a) = \exp_a(x)\exp_a(y)$

(b) $\exp_a(n) = \exp(n \ln a) = \exp(\underbrace{\ln a + \ln a + \ldots + \ln a}_{n \text{ mal}}) = (\exp(\ln a))^n = a^n$

(c) $\left(\exp_a\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q = \exp_a\left(q\frac{p}{q}\right) = \exp_a(p) = a^p \;\Rightarrow\; \exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$

□

Folgerung. Wie wir wissen gilt $\sqrt[n]{a} \to 1$ für $n \to \infty$ (für alle $a > 0$). Das folgt jetzt ganz einfach:

$$\sqrt[n]{a} = \exp_a\left(\tfrac{1}{n}\right) \to \exp_a(0) = 1 \quad (\text{da exp stetig})$$

Rechenregeln für die allgemeine Potenz

Satz. Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $(a^x)^y = a^{xy}$

(b) $a^x b^x = (ab)^x$

(c) $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} = (a^x)^{-1}$

Beweis.

(a) $(a^x)^y = \exp(y \ln a^x) = \exp(y \ln[\exp(x \ln a)]) = \exp(yx \ln a) = a^{xy}$

(b) $a^x b^x = \exp(x \ln a) \exp(x \ln b) = \exp(x(\ln a + \ln b)) = \exp(x(\ln ab)) = (ab)^x$

(c) $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \exp\left(x \ln \frac{1}{a}\right) = \exp(-x \ln a) = \begin{cases} = \exp((-x) \ln a) = a^{-x} \\ = \frac{1}{\exp(x \ln a)} = \frac{1}{a^x} \end{cases}$

□

Charakterisierung durch ihre Funktionalgleichung

Die Exponentialfunktion bzw. die allgemeine Potenz wird durch die Funktionalgleichung und den Wert an der Stelle 1 charakterisiert:

Satz. Ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig* mit der Eigenschaft:

$$F(x + y) = F(x)F(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

so gilt:

$$\begin{array}{ll} F(x) = 0 \text{ für alle } x & \text{falls } F(1) = 0 \text{ ist} \\ F(x) = a^x \text{ für alle } x & \text{falls } F(1) =: a \neq 0 \text{ ist} \end{array}$$

Insbesondere:

$$\text{Ist } F(1) = 1, \text{ so ist } F(x) = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Aus $F(1) = F(\frac{1}{2})^2 \geq 0$, folgt in jedem Fall $F(1) \geq 0$.

(a) $F(1) = 0$: Dann gilt $F(x) = F(x - 1)F(1) = 0$ für alle x.

(b) $a := F(1) > 0$:

$\Rightarrow a = F(1 + 0) = F(1)F(0) = aF(0)$, also $F(0) = 1$.

$\Rightarrow F(n) = F(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}}) = a^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow F(p) = F\left(q \frac{p}{q}\right) = F\left(\frac{p}{q}\right)^q$ für alle $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow F\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{F(p)} = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$.

$\Rightarrow F(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

Ist $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so existiert (x_n) aus $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$, also (da F stetig):

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} a^{x_n} = \lim_{n \to \infty} \exp_a(x_n) \underset{\text{da } \exp_a \text{ stetig}}{=} \exp_a(x) = a^x$$

□

Einige wichtige Grenzwerte

Es sollen nun einige wichtige Grenzwerte untersucht werden:

1. Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz:

$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{e^x}{x^k} = \infty \text{ für alle } x \in \mathbb{N}$$

   Beweis. Für $x > 0$ gilt:

$$\exp(x) \geq \tfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

   also:

$$\tfrac{e^x}{x^k} \geq \tfrac{x}{(k+1)!} \to \infty \text{ für } x \to \infty$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \tfrac{x^k}{e^x} \to 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (folgt aus 1).

3. $\lim\limits_{x\searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}} \underset{\substack{\uparrow \\ x=\frac{1}{y}}}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \tfrac{e^y}{y^k} = \infty$ (folgt aus 1).

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$

   Beweis. Für $x > e^K$ ist $\ln x > K$.

5. $\lim\limits_{x\searrow 0} \ln x = -\infty$

   Beweis. $\lim\limits_{x\searrow 0} \ln x = \lim\limits_{y\to\infty} \ln \tfrac{1}{y} = -\lim\limits_{y\to\infty} \overset{4}{=} -\infty.$

6. $\alpha > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\searrow 0} x^\alpha = 0$ bzw. $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{-\alpha} = \infty$

   Deshalb setzt man meistens:

$$0^\alpha = 0 \text{ für } \alpha > 0$$

   D.h. die folgende Funktion ist stetig:

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

   Bemerkung. 0^0 hat jedoch keinen Sinn:

   (a) Lässt man in

$$0^\alpha = 0$$

   α gegen 0 streben, so erhält man den Grenzwert 0.

   (b) Lässt man in

$$x^0 = 1 \text{ (für } x > 0)$$

   x gegen 0 streben, so erhält man den Grenzwert 1.

Beweis. Sei $x_n > 0$ mit $x_n \to 0$. Dann gilt $\alpha \ln x_n \to -\infty$, also:

$$x_n^\alpha = \exp(\alpha \ln x_n) \to 0, \text{ da } \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

7. Der Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz:

$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \text{ für alle } \alpha > 0$$

Beweis. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} \underset{\substack{y = \alpha \ln x \\ e^y = x^\alpha}}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{y}{e^y} \overset{2}{=} 0$

8. $\lim\limits_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ für alle $\alpha > 0$

Beweis. $\lim\limits_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x \underset{x = \frac{1}{y}}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \frac{-\ln y}{y^\alpha} \overset{7}{=} 0$

9. $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$

Beweis. $\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln n\right) \overset{7}{\to} \exp(0) = 1.$

Der Zusammenhang mit Wachstumsprozessen

Es soll nun noch eine weitere Charakterisierung der Zahl e gegeben werden. Es wird dadurch auch deutlich, dass die Exponentialfunktion eng mit Wachstumsprozessen zusammenhängt.

Satz. Es gilt:

$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \to e \text{ für } n \to \infty$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\tfrac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} \underbrace{\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} < e \text{ für alle } n
\end{aligned}$$

Andererseits gilt für alle $N \in \mathbb{N}$ und $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n &\geq \sum_{k=0}^{N} \tfrac{1}{k!}\tfrac{n}{n}\tfrac{n-1}{n}\cdots\tfrac{n-k+1}{n} \\
&\xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ \text{(endliche Summe)}}]{} \sum_{k=0}^{N} \tfrac{1}{k!} =: x_N
\end{aligned}$$

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$$e > \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \geq x_N - \tfrac{1}{N} \text{ für } n \geq n_0$$

Da x_N (nach Definition von e) gegen e konvergiert, folgt damit:

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \to e$$

□

Bemerkung. Die Folge (x_n) mit $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ist streng wachsend.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{x_n} &= G\left(1, \underbrace{1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{1}{n}}_{n}\right) \\
&< A\left(1, \underbrace{1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{1}{n}}_{n}\right) \\
&= \tfrac{n+2}{n+1} = 1 + \tfrac{1}{n+1} = \sqrt[n+1]{x_{n+1}}
\end{aligned}$$

□

Allgemeiner (als der obige Satz) gilt:

Satz. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Beweis.

(a) $x_n > 0,\ x_n \to 0$: Für jedes n existiert ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit:

$$\tfrac{1}{k_n+1} < x_n \leq \tfrac{1}{k_n} \quad (\text{bzw. } k_n \leq \tfrac{1}{x_n} < k_{n+1})$$

also:

$$\begin{aligned}
\left(1+\tfrac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < (1+x_n)^{k_n} \leq (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \\
\ldots < (1+x_n)^{k_n+1} \leq \left(1+\tfrac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}}_{\to e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}}_{\to 1} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}$$

und

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} < \underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}}_{\to e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{1}}_{\to 1}$$

Damit erhalten wir schließlich:

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$$

(b) $x_n > 0,\ x_n \to 0:$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(\tfrac{1}{1+x}\right)^{-\frac{1}{x}} = \left(1-\tfrac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1+x}{x}+1}$$

$$= \underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{x}{1+x}}_{>0,\ \to 0}\right)^{-\frac{1}{\frac{x}{1+x}}}}_{\to e} \underbrace{\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{1}}_{\to 1} \to e$$

□

Satz. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n$$

Beweis.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right\}^x \underset{\substack{\uparrow\\ \text{wegen der Stetigkeit von } t\mapsto t^x}}{=} \left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right\}^x \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz}}}{=} e^x$$

□

Hieran erkennt man den engen Zusammenhang mit *Wachstumsprozessen*: Eine Population P vermehre sich in einer Zeiteinheit *um* das x-fache, in $\frac{1}{n}$ Zeiteinheiten *um* das $\frac{x}{n}$-fache. Nimmt man an, dass die neu erzeugte Population sofort selbst zum Wachstum beiträgt, so erhält man nach einer Zeiteinheit:

$$P\left(1+\tfrac{x}{n}\right)\cdots\left(1+\tfrac{x}{n}\right) = P\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n$$

Für $n \to \infty$ (immer kleinere Zeitintervalle) erhält man:

$$P \cdot e^x$$

Geht man von der Verdoppelung in einem Zeitintervall aus (d.h. $x = 1$), so ergibt sich bei dieser kontinuierlichen Betrachtungnach nach einer Zeiteinheit die e-fache Population eP.

Ein anderes Beispiel ist die *kontinuierliche Verzerrung*. Wir kommen im Zusammenhang mit der Differentialrechnung auf dieses Phänomen zurück.

Kapitel 9

Komplexe Zahlen und komplexe Exp-Funktion

Für jedes $a \geq 0$ existiert eine, für $a > 0$ sogar zwei, Quadratwurzel(n). Für negative Zahlen existiert – zumindest in $\mathbb{R}$ – keine Quadratwurzel. Ähnlich sieht es für höhere $2n$-te Wurzeln aus. Dies ist einer von vielen Gründen, weshalb man den Körper der reellen Zahlen vergrößert. In diesem größeren Körper hat dann jede Zahl $\neq 0$ genau k k-te Wurzeln.

Die Vergrößerung geschieht dadurch, dass man zunächst ein Element i hinzunimmt, das die Eigenschaft $i \cdot i = i^2 = -1$ haben soll. Insgesamt betrachten wir Elemente der Form:

$$x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}$$

Dabei sollen die folgenden Rechenregeln gelten:

(a) *Addition*

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

(b) *Multiplikation*

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Es gilt:

1. Das *Nullelement* (neutrales Element bezüglich Addition):

$$0 + i0 = \text{„}0\text{“}$$

2. Das *Einselement* (neutrales Element bezüglich Multiplikation):

$$1 + i0 = \text{„}1\text{“}$$

3. Das *negative Element* zu $x + iy$ (inverses Element bezüglich Addition):

$$-(x + iy) = -x - iy = -x + i(-y)$$

4. Das *inverse Element* zu $x + iy \neq 0$, d.h. $x^2 + y^2 \neq 0$ (inverses Element bezüglich Multiplikation):

$$(x + iy)^{-1} = \tfrac{x}{x^2+y^2} - i\tfrac{y}{x^2+y^2}$$

Bemerkung. Das negative Element ist leicht zu finden. Das inverse Element kann man durch folgende *formale Rechnung* finden:

$$(x + iy)^{-1} = \tfrac{1}{x+iy}\tfrac{x-iy}{x-iy} = \tfrac{x-iy}{x^2+y^2+i(xy-xy)} = \tfrac{x}{x^2+y^2} - i\tfrac{y}{x^2+y^2}$$

Man rechnet leicht nach, dass tatsächlich gilt:

$$(x + iy) \times \left(\tfrac{x}{x^2+y^2} - i\tfrac{y}{x^2+y^2}\right) = \ldots = 1 + i0 = 1$$

Es ist leicht (und soll hier übergangen werden) zu zeigen, dass die Axiome der Addition, Multiplikation und das Distributivgesetz erfüllt sind, d.h. es handelt sich um einen *Körper* $\mathbb{C}$.

Die Elemente $z = x + iy$ kann man als Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ auffassen. Die Punkte $x + i0$ entsprechen den Punkten auf der reellen Achse, Addition und Multiplikation solcher Elemente führen nicht aus dem Reellen heraus. $\mathbb{R}$ ist ein *Unterkörper* von $\mathbb{C}$.

Die Addition der komplexen Zahlen entspricht in der Ebene (Riemannsche Zahlenebene) der Vektoraddition. Die Multiplikation werden wir erst später geometrisch denken.

Es gilt $i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = 0 - 1 + i(0 + 0) = -1 + i0 = -1$, d.h. wir haben zunächst das Gewünschte erreicht. Tatsächlich hat sogar jede negative Zahl $x = x + i0$ (wobei $x < 0$) zwei Quadratwurzeln $\pm i\sqrt{-x}$:

$$\left(\pm i\sqrt{-x}\right)^2 = \left(0 \pm i\sqrt{-x}\right)^2 = -\left(\sqrt{-x}\right)^2 = -x$$

Wir wollen sehen, dass es weitere Wurzeln nicht gibt, genauer: Jede Zahl $\neq 0$ wird genau k k-te Wurzeln haben.

Begriffe im Zusammenhang mit komplexen Zahlen

Zahlen der Form $iy = 0 + iy$ heißen *(rein) imaginär.*

Definition.

(a) *Realteil* von $x + iy$

$$\Re z = \Re(x + iy) = x$$

(b) *Imaginärteil* von $x + iy$

$$\Im z = \Im(x + iy) = y \quad \text{(nicht } iy\text{)}$$

Offenbar gilt: $z = z' \Leftrightarrow \Re z = \Re z'$ und $\Im z = \Im z'$

Die zu z *konjugiert komplexe Zahl* $\overline{z}$ ist:

$$\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy = x + i(-y)$$

Geometrisch ist dies die
Spiegelung an der reellen Achse

Beobachtung. Mit dieser Bezeichnung folgt:

$$\Re z = \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}),\ \Im z = \tfrac{1}{2i}(z - \overline{z}),$$
$$\overline{\overline{z}} = z,\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

Nur im letzten Fall erfordert der Beweis eine kleine Rechnung.

Der *Betrag* einer komplexen Zahl ist die Länge des entsprechenden Vektors im Vektorraum $\mathbb{R}^2$, also (nach Pythagoras):

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}} \quad (\text{oder } |z|^2 = z\overline{z})$$

Insbesondere gilt:

$$|\overline{z}| = |z|\,,\ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Satz.

(a) $|z_1|\,|z_2| = |z_1 z_2|$

(b) $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \quad$ (Dreiecksungleichung)

Beweis.

(a) $|z_1 z_2| = \sqrt{(z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)}} = \sqrt{(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})} = \sqrt{z_1\overline{z_1}}\sqrt{z_2\overline{z_2}} = |z_1|\,|z_2|$

(b) Geometrisch ist diese Aussage offensichtlich.

$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$

$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + 2\Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$

$\leq |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$

□

Konvergenz von Folgen und Reihen

Die Definitionen und Resultate von Folgen und Reihen lassen sich leicht auf die komplexen Zahlen übertragen:

Eine Folge (z_n) aus $\mathbb{C}$ heißt *konvergent* gegen ein $z \in \mathbb{C}$, wenn gilt:

$$|z_n - z| \to 0,\ z_n \to z,\ z = \lim z_n,\ \ldots$$

Offensichtlich gilt:

$$z_n \to z \Leftrightarrow \overline{z_n} \to \overline{z} \Leftrightarrow \Re z_n \to \Re z \text{ und } \Im z_n \to \Im z$$
$$\lim z_n = \lim \Re z_n + i \lim \Im z_n$$

Eine Folge (z_n) aus $\mathbb{C}$ heißt eine *Cauchyfolge*, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, m, n \geq n_0\ \ \ |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Offensichtlich:

$$(z_n) \text{ Cauchyfolge in } \mathbb{C} \Leftrightarrow (\Re z_n) \text{ und } (\Im z_n) \text{ Cauchyfolgen in } \mathbb{R}$$

Satz. $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge konvergiert in $\mathbb{C}$.

Beweis. (z_n) Cauchyfolge $\Rightarrow$ $(\Re z_n)$ und $(\Im z_n)$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R}$ mit $\Re z_n \to x$, $\Im z_n \to y$. Also:

$$z_n = \Re z_n + i\Im z_n \to x + iy =: z$$

□

Wie in $\mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

$$z_n \to z,\ w_n \to w \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & z_n \pm w_n \to z \pm w \\ \text{(b)} & z_n w_n \to zw \\ \text{(c)} & \frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w} \quad (\text{falls } w \neq 0) \end{array}$$

Eine *komplexe Reihe* $\sum z_n$ heißt *konvergent*, wenn die Folge der Partialsummen (s_m) mit $s_m = \sum_{n=0}^{m} z_n$ konvergiert. Die Reihe heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum |z_n|$ (in $\mathbb{R}$) konvergiert.

Wie in $\mathbb{R}$ gilt: absolut konvergent $\Rightarrow$ konvergent. Die absolute Konvergenz ist also eine rein reelle Angelegenheit, weshalb die früher bewiesenen Resultate unverändert gelten (Wurzelkriterium, Quotientenkriterium, Majorantenkriterium).

Die komplexe Exponentialfunktion

Die *komplexe Exponentialfunktion* ist definiert durch:

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{n!}$$

Man beachte, dass die Reihe nach dem Quotientenkriterium für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Einige Eigenschaften:

1. *Funktionalgleichung.*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$
$$(\text{insbesondere gilt } \exp(z) \neq 0 \text{ für alle } z)$$

   Der Bmweis ist exakt der gleiche wie im Reellen, man beachte insbesondere, dass auch das Cauchy-Produkt im Komplexen unverändert gilt.

2. $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$

   Beweis.

$$\begin{aligned}\exp(\overline{z}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{z})^n}{n!} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \lim_{m\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{n!}} \\ &= \overline{\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp(z)}\end{aligned}$$

□

3. $|\exp(ix)| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

   Beweis.

   $$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(0) = 1$$

   □

4. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

   Beweis. Ist wörtlich aus dem Reellen übertragbar.

Exponentialfunktion zur Basis a

Auch die *Exponentialfunktion zur Basis* a (wobei $a > 0$) lässt sich problemlos auf das Komplexe ausdehnen:

$$\exp_a(z) := \exp(z \ln a) \quad (=: a^z)$$

Auch hier gilt:

(a) $\exp_a(z_1 + z_2) = \exp_a(z_1)\exp_a(z_2)$

(b) $\left(\frac{1}{a}\right)^z = a^{-z} = (a^z)^{-1}$

(c) $(a^x)^z = a^{xz}$ für $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

   Dies hat in der Funktinentheorie auch für $x \in \mathbb{C}$ Sinn.

(d) $a^z b^z = (ab)^z$

Kapitel 10

Trigonometrische Funktionen

sin, cos, tan, cot,
arcsin, arccos, arctan, arccot

Das Argument einer komplexen Zahl

Aus den vorhergehenden Kapiteln wissen wir, dass $|\exp(it)| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Noch nicht bekannt ist uns, wo sich der Wert e^{it} auf der Einheitskreislinie befindet. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz. Für $t > 0$ (bzw. $t < 0$) erhält man den Wert e^{it}, indem man vom Punkt 1 startend auf der Einheitskreislinie in $\mathbb{C}$ entgegen dem (bzw. im) Uhrzeigersinn um die Bogenlänge $|t|$ fortschreitet. Insbesondere gilt also:

$$e^{i\pi} = -1, \; e^{2i\pi} = 1, \; e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \; e^{3\frac{\pi}{2}i} = -i$$

Beweis.

(a) *Behauptung.* Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ erhält man iz bzw. $-iz$ durch Drehung um 90 Grad gegen bzw. im Uhrzeigersinn.

Beweis.

$$iz = i(x + iy) = -y + ix \text{ und } -iz = y + i(-x)$$

(b) *Behauptung.* Für $0 < s < 1$ liegt $e^{i(t+s)} = e^{is}e^{it}$ in dem entgegen dem Uhrzeigersinn auf e^{it} folgenden Quadranten (entsprechend für $-1 < s < 0$). Daraus folgt dann: Wenn t wächst, läuft e^{it} entgegen dem Uhrzeigersinn auf der Einheitskreislinie (wenn t fällt, läuft es im Uhrzeigersinn).

Beweis. In $e^{is} = a + ib$ ist (wegen $\left|e^{is}\right| = 1$):

$$|a| \leq 1 \text{ und } |b| \leq 1$$

Für $|s| < 1$ gilt außerdem:

$$\begin{aligned} e^{is} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(is)^n}{n!} \\ &= \left(\underbrace{1-\frac{s^2}{2!}+\frac{s^4}{4!}-\ldots+\ldots}_{=:a>0}\right) + \underbrace{i\,s\left(\underbrace{1-\frac{s^2}{3!}+\frac{s^4}{5!}-\ldots+\ldots}_{>0}\right)}_{:=b} \end{aligned}$$

Es gilt:
$$b = \begin{cases} >0 & \text{für } 0 < s < 1 \\ <0 & \text{für } -1 < s < 0 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$e^{i(t+s)} = e^{is}e^{it} = (a+ib)e^{it} = ae^{it} + ibe^{it}$$

positives Vielfaches von e^{it}

entgegen dem Uhrzeigersinn gedrehtes positives Vielfaches von e^{it}

Daraus ergibt sich die erste Behauptung (die zweite folgt daraus).

(c) *Behauptung.* Die Länge des Bogens $L(t)$ von 1 bis e^{it} (gemessen in der t entsprechenden Umlaufrichtung und gegebenenfalls mit allen Umläufen) ist gleich $|t|$.

Beweis. Sei $L_n(t)$ die Länge des n-teiligen Polygonzuges 1 bis e^{it}.

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{i\frac{k+1}{n}t} - e^{i\frac{k}{n}t} \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left| e^{i\frac{k}{n}t} \right|}_{=1} \left| e^{i\frac{t}{n}} - 1 \right| \\ &= n \left| e^{i\frac{t}{n}} - 1 \right| = |t| \left| \frac{e^{i\frac{t}{n}}-1}{i\frac{t}{n}} \right| \to |t| \text{ für } n \to \infty \end{aligned}$$

vgl. folgenden Hilfssatz

Also:

$$L(t) = \text{Länge des Bogens} = \lim_{n\to\infty} L_n(t) = |t|$$

□

Hilfssatz. $\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z} = 1$

Beweis. Die Restgliedabschätzung aus Kapitel 8 besagt:

$$\text{Für } |z| < \tfrac{N+2}{2} \text{ gilt } \left| e^z - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right| \le 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Also gilt für $|z| < \frac{3}{2}$:

$$\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| = \frac{1}{|z|}\left|e^z - \left(1 + \frac{z}{1!}\right)\right| \leq \frac{1}{|z|} 2\frac{|z|^2}{2!} = |z| \to 0 \text{ für } z \to 0$$

□

Damit folgt. Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gibt es ein φ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ (φ ist der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und z, gemessen im Bogenmaß entgegen dem Uhrzeigersinn). φ nennt man das *Argument* von z oder kurz $\arg(z)$. Es gilt dann auch:

$$z = e^{i(\varphi + 2k\pi)} \text{ für jedes } k \in \mathbb{Z}$$

Also hat jedes $z \in \mathbb{C}$ die Form:

$$z = |z|\, e^{i\varphi} = re^{i\varphi} \text{ mit } r = |z| \text{ und } \varphi = \arg(z)$$

Bemerkung. Für $z = 0$ ist φ ohne Bedeutung.

Geometrische Interpretation der Multiplikation in $\mathbb{C}$

Damit ergibt sich eine einfache *geometrische Interpretation des Produkts* in $\mathbb{C}$. Sei $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$, dann gilt:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi)}$$

Merkhilfe. Die Beträge multiplizieren sich, die Argumente addieren sich.

Ziehen beliebiger Wurzeln

Jetzt können wir auch beliebige Wurzeln ziehen:

Satz. Jede komplexe Zahl $\neq 0$ hat genau n n-te Wurzeln:

$$z = re^{i\varphi} \Rightarrow \sqrt[n]{z} = \underbrace{\sqrt[n]{r}}_{>0}\, e^{i\frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi)} \quad \text{mit } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Beweis. Die angegbenen sind jedenfalls n-te Wurzeln:

$$\left(\sqrt[n]{r} e^{\frac{i}{n}(\varphi + 2k\pi)}\right)^n = re^{i(\varphi + 2k\pi)} = re^{i\varphi} = z$$

Sei nun $\varrho e^{i\psi}$ eine n-te Wurzel, d.h. $\left(\varrho e^{i\psi}\right)^n = z$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\varrho^n e^{in\psi} = re^{i\varphi} \\
&\Rightarrow \varrho^n = \left|\varrho^n e^{in\psi}\right| = \left|re^{i\varphi}\right| = r \text{ also } \varrho = \sqrt[n]{r} \\
&\Rightarrow e^{in\psi} = e^{i\varphi} \Rightarrow e^{i(n\psi - \varphi)} = 1 \\
&\Rightarrow n\psi - \varphi = 0 \pmod{2\pi} \text{ also } n\psi - \varphi = 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \psi = \frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Offensichtlich genügt es, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ zu betrachten. Für $k' = k + n$ erhält man wieder die geiche Zahl wie für k.

□

Bemerkung. Für $z = re^{i\varphi}$ ist:

$$\tfrac{1}{z} = \tfrac{1}{r}e^{-i\varphi}$$

Denn es gilt:

$$\left(re^{i\varphi}\right)\left(\tfrac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) = 1e^{i0} = 1$$

Sinus und Cosinus

Wir gehen von der geometrischen Definition im rechtwinkligen Dreieck aus.

$$\sin\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

Diese Definition hängt (Strahlensätze) nur vom Winkel, nicht von der Größe des Dreiecks ab. Am Einheitskreis in $\mathbb{C}$ liefert dies sofort:

$$\sin\varphi = \Im e^{i\varphi}$$

$$\cos\varphi = \Re e^{i\varphi}$$

Also gelten die *Eulerschen Formeln*:

$$\begin{aligned}\sin t &= \tfrac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})\\ \cos t &= \tfrac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})\\ e^{it} &= \cos t + i\sin t\\ \text{außerdem: } \sin^2 t &+ \cos^2 t = 1\end{aligned}$$

Es gilt die folgende Reihendarstellung:

$$\begin{aligned}\cos t &= \tfrac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\left\{(it)^n + (-it)^n\right\}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(it)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 - \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^4}{24} - \ldots + \ldots\end{aligned}$$

und entsprechend:

$$\sin t = \tfrac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t - \tfrac{t^3}{6} + \tfrac{t^5}{120} - \ldots + \ldots$$

Man erkennt hieran sofort:

$$\begin{array}{ll}\cos t = \cos(-t) & \text{d.h. cos ist eine gerade Funktion}\\ \sin t = -\sin(-t) & \text{d.h. sin ist eine ungerade Funktion}\end{array}$$

Satz (Additionstheoreme).

$$\cos(u \pm v) = \cos u\cos v \mp \sin u\sin v$$

$$\sin(u \pm v) = \sin u\cos v \pm \cos u\sin v$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\cos(u \pm v) + i\sin(u \pm v) \\
&= e^{i(u\pm v)} = e^{iu}e^{\pm iv} \\
&= (\cos u + i\sin u)(\cos(\pm v) + i\sin(\pm v)) \\
&= (\cos u + i\sin u)(\cos v \pm i\sin v) \\
&= \cos u\cos v \mp \sin u\sin v + i(\sin u\cos v \pm \cos u\sin v)
\end{aligned}$$

Da in einer Gleichung zwangsläufig auch Realteil und Imaginärteil getrennt gleich sein müssen, folgen die behaupteten Gleichungen.

□

Speziell gilt:

$$\cos 2u = \cos(u+u) = \cos^2 u - \sin^2 u$$
$$\sin 2u = \sin(u+u) = 2\sin u\cos u$$

Weitere Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Aus:

$$\cos\left(t + \tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(t + \tfrac{\pi}{2}\right) = e^{i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = ie^{it} = i\cos t - \sin t$$

folgt:

$$\cos\left(t + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin t,\ \sin\left(t + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos t$$
$$\text{entsprechend: } \cos\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right) = \sin t,\ \sin\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right) = -\cos t$$

Daraus folgt weiter:

$$\cos(t \pm \pi) = -\cos t,\ \sin(t \pm \pi) = -\sin t$$
$$\cos(t \pm 2\pi) = \cos t,\ \sin(t \pm 2\pi) = \sin t$$

Sinus und Cosinus sind also 2π-*periodisch.* Das sieht man natürlich auch am Einheitskreis.

Arcus Sinus und Arcus Cosinus

Am Einheitskreis erkennt man auch sofort:

$$\sin \text{ ist streng wachsend in } \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

Also existiert die Umkehrfunktion:

$$\textit{Arcus Sinus},\ \arcsin : [-1,1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

Entsprechend gilt:

$$\cos \text{ ist streng fallend in } [0,\pi]$$

Also existiert die Umkehrfunktion:

$$\textit{Arcus Cosinus},\ \arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

Tangens

Es gilt im rechtwinkligen Dreieck:

$$\tan\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Dabei ist:

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Problem. Wie verhält sich der Graph von tan?

$$\begin{aligned}
&\sin x \leq 0 \text{ und wachsend in } \left[-\tfrac{\pi}{2}, 0\right] \\
&\cos x \geq 0 \text{ und wachsend in } \left[-\tfrac{\pi}{2}, 0\right] \\
&\Rightarrow \tan x \leq 0 \text{ und wachsend in } \left(-\tfrac{\pi}{2}, 0\right] \\
&\sin x \geq 0 \text{ und wachsend in } \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \\
&\cos x \geq 0 \text{ und fallend in } \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \\
&\Rightarrow \tan x \geq 0 \text{ und wachsend in } \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Wegen $\sin(x+\pi) = -\sin x$ und $\cos(x+\pi) = -\cos x$ folgt:

$$\tan(x+\pi) = \tan x \quad \text{(d.h. tan ist } \pi\text{-\textit{periodisch})}$$

Da tan in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ stetig und streng wachsend ist, existiert die Umkehrfunktion:

Arcus Tangens, $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Cotangens

$$\cot\varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \tfrac{1}{\cos\varphi} = \tfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

Dabei ist:

$$D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$$

cot ist in $(0,\pi)$ streng fallend. Deshalb existiert die Umkehrfunktion:

Arcus Cotangens, $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$

Kapitel 11

Differentiation

An zwei Beispielen soll das weitere Vorgehen motiviert werden.

Beispiel 1

Ein Punkt bewegt sich auf einer Geraden. Zur Zeit t befinde er sich an der Stelle $x(t)$ (eine Funktion von t mit Werten in $\mathbb{R}$). Die *mittlere Geschwindigkeit* im Zeitintervall $[t_0, t]$ beträgt:

$$\tfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$$

Das gilt übrigens auch, wenn $t < t_0$ ist. Um die Geschwindigkeit im Zeitpunkt t_0 zu ermitteln, betrachtet man immer kleinere Zeitintervalle $[t_0, t]$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \tfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$$

so nennen wir diesen die *Momentangeschwindigkeit* zur Zeit t_0.

Beispiel 2

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten den Graphen Γ_f. Für den *Steigungswinkel* α der Sekante zwischen x_0 und x gilt:

$$\text{Steigung} := \tan \alpha = \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Existiert hier der Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

so nennen wir diesen Grenzwert die *Steigung* der Kurve in x_0.

Ähnliche Überlegungen treten in vielen unterschiedlichen Zusammenhängen auf (beispielsweise in der Mathematik, Physik, Biologie, Wirtschaft). Grenzwerte dieses Typs treten etwa auf, wenn man die (momentane) Leistung, Beschleunigung oder Zuwachsrate bestimmen will.

Differenzierbarkeit und Ableitung

Man kann auch von einer etwas anderen Frage ausgehen: Sei f eine Funktion, die jedenfalls in der Nähe von x_0 definiert ist. Gibt es eine lineare (genauer: affine) Funktion $g(x) = \alpha + \beta(x - x_0)$ die nahe x_0 „sehr gut" mit f übereinstimmt?

Sicher ist es günstig $\alpha = f(x_0)$ zu wählen. Es soll also gelten:

$$\beta(x - x_0) \cong f(x) - f(x_0) \text{ bzw. } \beta \cong \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Wählt man:

$$\beta = \lim_{x \to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{(falls dieser Grenzwert existiert)}$$

so wird man nahe bei x_0 gute Übereinstimmungen zwischen f und g erwarten. Wir werden das unten sehen.

Definition. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ und sei $x_0 \in (a, b)$.

(a) f heißt *bei* x_0 *differenzierbar*, wenn der Grenzwert:

$$\lim_{x \to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$x \in (a, b),\ x \neq x_0 \qquad\qquad x_0 + h \in (a, b),\ h \neq 0$$

existiert.

(b) Dieser Grenzwert heißt *Ableitung* von f im Punkt x_0, er wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

(c) Der Bruch:

$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

heißt der *Differenzenquotient* bei x_0.

(d) $f'(x_0)$ heißt der *Differentialquotient* bei x_0. Man schreibt dafür auch:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \text{ oder } \left.\tfrac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}$$

Normalerweise versteht man unter Differentialquotient keinen wirklichen Quotienten, gelegentlich aber auch als Quotient der Differentiale

$$\mathrm{d}f = f'(x_0) \cdot \Delta x \text{ und } \mathrm{d}x = \Delta x$$

wobei Δx eine „kleine" x-Differenz ist.

Jetzt können wir auch zeigen, dass die Differenzierbarkeit in x_0 gleichbedeutend ist mit einer „guten" Approximierbarkeit durch eine lineare Funktion ist:

Satz (lineare Approximierbarkeit). f ist genau dann bei x_0 differenzierbar, wenn ein $m \in \mathbb{C}$ existiert mit:

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi_{x_0}(x)$$

wobei gilt:

$$\frac{\varphi_{x_0}}{x-x_0} \to 0 \text{ für } x \to x_0$$

Es gilt dann $f'(x_0) = m$. Ist f bei x_0 differenzierbar, so ist f stetig bei x_0.

Beweis.

(a) Sei f differenzierbar in x_0. Sei außerdem $m := f'(x_0)$ und

$$\varphi_{x_0}(x) := f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)$$

Dann gilt nach Definition der Differenzierbarkeit:

$$\frac{\varphi_{x_0}(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m \to 0 \text{ für } x \to x_0$$

(b) Es gelte:

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi_{x_0}(x) \text{ mit } \frac{\varphi_{x_0}(x)}{x-x_0} \to 0 \text{ für } x \to x_0$$

Dann gilt:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m + \frac{\varphi_{x_0}(x)}{x-x_0} \to m \text{ für } x \to x_0$$

Das heißt f ist in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = m$.

(c) Aus:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{m(x - x_0)}_{\to 0} + \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \underbrace{\frac{\varphi_{x_0}(x)}{x - x_0}}_{\to 0} \to f(x_0) \text{ für } x \to x_0$$

folgt die Stetigkeit in x_0.

$\square$

$f : (a, b) \to \mathbb{C}$ heißt *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt von (a, b) differenzierbar ist. Man erhält dann eine neue Funktion:

$$f' : (a, b) \to \mathbb{C},\ x \mapsto f'(x) \quad \text{(die \textit{Ableitung} von } f)$$

Eventuell ist diese neue Funktion f' ebenfalls differenzierbar:

$$(f')' = f'' = f^{(2)} \quad \text{(die zweite Ableitung von } f)$$

Völlig analog ist $f^{(j)}$ die j-te Ableitung (die Ableitung von $f^{(j-1)}$). Allgemein spricht man von *höheren Ableitungen*.

Beispiele

1. Beispiel (konstante Funktion):

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f(x) = c \ \ \forall\, x$$

Dann gilt:

$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \text{ für alle } x, x_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq x_0$$

Also $f'(x_0) = 0$.

2. Beispiel (identische Funktion id):

$$f(x) = x$$

Dann gilt:

$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \tfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \text{ für alle } x, x_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq x_0$$

Also $f'(x_0) = 1$, d.h. f ist die konstante Funktion 1.

3. Beispiel:

$$f(x) = x^2$$

Dann gilt:

$$\tfrac{1}{h}\left[(x+h)^2 - x^2\right] = \tfrac{1}{h}\left[(x^2 + 2xh + h^2 - x^2\right] = 2x + h \to 2x \text{ für } h \to 0$$

Also $f'(x) = 2x$.

Bemerkung. Später könnten wir das mit der Produktregel aus dem zweiten Beispiel gewinnen, denn $x^2 = x \cdot x$.

4. Beispiel:

$$f(x) = \tfrac{1}{x} \text{ für } x \neq 0$$

Dann gilt:

$$\tfrac{1}{h}\left(\tfrac{1}{x+h} - \tfrac{1}{x}\right) = \tfrac{x-x-h}{hx(x+h)} = \tfrac{-1}{x(x+h)} \to -\tfrac{1}{x^2} \text{ für } h \to 0 \text{ und } x \neq 0$$

Also $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Bemerkung. Später könnten wir das mit der Quotientenregel aus dem zweiten Beispiel ableiten.

5. Beispiel (Exponentialfunktion):

$$f(x) = \exp(x)$$

Dann gilt:

$$\tfrac{1}{h}(\exp(x+h)-\exp(x)) = \exp(x)\underbrace{\frac{\exp(h)-1}{h}}_{\to 1} \to \exp(x) \text{ für } h\to 0$$

Also $\exp'(x) = \exp(x)$.

6. Beispiel (Sinus):

$$f(x) = \sin x$$

Dann gilt unter Verwendung des entsprechenden Additionstheorems:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{h}(\sin(x+h)-\sin x) &= \tfrac{1}{h}(\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x) \\ &= \sin x\underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\mathrm{II}}\cos x \end{aligned}$$

wobei:

$$\mathrm{I} \;= \tfrac{1}{h}\tfrac{1}{2}\left(e^{ih}+e^{-ih}-2\right) = \tfrac{i}{2}\left\{\underbrace{\frac{e^{ih}-1}{ih}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{e^{-ih}-1}{-ih}}_{\to 1}\right\} \to 0$$

$$\mathrm{II} = \tfrac{1}{h}\tfrac{1}{2i}\left(e^{ih}-e^{-ih}\right) = \tfrac{1}{2}\left\{\underbrace{\frac{e^{ih}-1}{ih}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{e^{-ih}-1}{-ih}}_{\to 1}\right\} \to \tfrac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

Also $\sin' x = \cos x$.

7. Beispiel (Cosinus):

$$f(x) = \cos x$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{h}(\cos(x+h)-\cos x) &= \tfrac{1}{h}(\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x) \\ &= \cos x\underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \to -\sin x \end{aligned}$$

Also $\cos' x = -\sin x$.

8. Beispiel (Betragsfunktion):

$$f(x) = \mathrm{abs}(x)$$

Diese Funktion ist nicht differenzierbar in 0. Es gilt zwar:

differenzierbar in $(-\infty,0)$	$\mathrm{abs}'(x) = -1$
differenzierbar in $(0,\infty)$	$\mathrm{abs}'(x) = 1$

Aber im Nullpunkt selbst ist die linksseitige Ableitung -1, während die rechtsseitige Ableitung 1 ist.

Differentiationsregeln

Um zusammengesetzte Funktionen zu differenzieren, benutzen wir die folgenden *Differentiationsregeln.*

Satz. Seien f, g differenzierbar, $c \in \mathbb{C}$. Dann sind auch

$$f + g,\ cf,\ fg \text{ und } \tfrac{f}{g}$$

differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
(f+g)' &= f' + g' \\
(cf)' &= cf' \\
(fg)' &= f'g + fg' \qquad \text{(Produktregel)} \\
\left(\tfrac{f}{g}\right)' &= \tfrac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind sehr einfach, die zweite ist außerdem ein Spezialfall der dritten.

(a) Produktregel:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{h}(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)) \\
&= \tfrac{1}{h}\left\{f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + (f(x+h) - f(x))g(x)\right\} \\
&= \underbrace{f(x+h)}_{\to f(x)} \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\to g'(x)} + \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\to f'(x)} g(x) \\
&\to fg'(x) + f'g(x) \text{ für } h \to 0
\end{aligned}$$

(b) Die Funktion $\frac{1}{g}$ als Spezialfall von $\frac{f}{g}$:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{h}\left(\tfrac{1}{g(x+h)} - \tfrac{1}{g(x)}\right) = \tfrac{1}{h}\tfrac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \\
&= \underbrace{\frac{-1}{g(x+h)g(x)}}_{\to \frac{-1}{g(x)}} \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\to g'(x)} \to -\tfrac{g'(x)}{g(x)^2} \text{ für } h \to 0
\end{aligned}$$

(c) Quotientenregel:

$$\left(\tfrac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \tfrac{1}{g}\right)' = f' \cdot \tfrac{1}{g} + f \cdot \left(\tfrac{1}{g}\right)' = \tfrac{f'}{g} - \tfrac{fg'}{g^2} = \tfrac{f'g - fg'}{g^2}$$

□

Damit können insbesondere beliebige (ganzzahlige) Potenzen und somit alle Polynome abgeleitet werden.

9. Beispiel:

$$f(x) = x^n \text{ (wobei } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

Behauptung. $f'(x) = nx^{n-1}$

Beweis.

(a) $n = 1$.

$$f = \mathrm{id} \Rightarrow f'(x) = 1 = 1 \cdot x^0 = nx^{n-1}$$

(b) $n \Rightarrow n+1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Dann liefert die Produktregel:

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1x^n + xnx^{n-1} = x^n + nx^n = (1+n)x^n$$

Damit ist die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(c) Für $n < 0$ gilt:

$$(x^n)' = \left(\tfrac{1}{x^{-n}}\right)' = -\tfrac{(x^{-n})'}{x^{-2n}} = -\tfrac{(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}$$

□

10. Beispiel (Polynome).

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow p'(x) = \sum_{k=1} nka_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}x^k$$

Bemerkung. Insbesondere hat p' einen Grad, der um 1 kleiner ist als der Grad von p.

Kettenregel

Satz. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{C}$ mit $f(D) \subset E$. Sei f differenzierbar in x_0, g differenzierbar in $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0 mit:

$$(g \circ f)'(x_0) = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Beweis. Wir definieren:

$$g^\star : E \to \mathbb{C},\ g^\star(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} & \text{für } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{für } y = f(x_0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $g^\star$ ist stetig in $f(x_0)$ und es gilt:

$$g(y) - g(f(x_0)) = g^\star(y)(y - f(x_0)) \text{ für alle } y \in E$$

Daraus folgt:

$$\tfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \underbrace{g^\star(f(x))}_{\to g^\star(f(x_0)) \,=\, g'(f(x_0))} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \to g'(f(x_0))f'(x_0) \text{ für } x \to x_0$$

□

Folgerung. Es gilt:

$$(f \circ g \circ h) = f' \circ g \circ h \times g' \circ h \times h'$$

oder

$$f(g(h(x)))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Hiermit ergibt sich z.B. auch ein anderer Beweis für die Quotientenregel.

Beweis. Für $g(y) = \frac{1}{y}$ gilt (nach Beispiel 4):

$$g'(y) = -\frac{1}{y^2}$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{f(x)} = g(f(x)) \Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{1}{f^2(x)} f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

□

Ein weiteres Beispiel

11. Beispiel:

$$f(x) = \sin(x^2)$$

Dann gilt:

$$f'(x) = \cos(x^2)2x = 2x\cos x^2$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Satz. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, $g := f^{-1}$ die Umkehrfunktion von f. Ist f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist g in $f(x_0)$ differenzierbar mit:

$$g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ bzw. } g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \text{ (falls } f'(g(y)) \neq 0 \text{ ist)}$$

Beweis. Dies ist geometrisch evident, da sich der Graph und somit auch die Tangenten der Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden ergibt.

$D_g = D_{f^{-1}}$ ist der Wertebereich von f. Sei $y_n \in D_g \setminus \{f(x_0)\}$ mit $y_n \to f(x_0)$, $x_n \in D_f$ mit $y_n = f(x_n)$. Dann gilt:

$$x_n \neq x_0 \text{ und } x_n = g(y_n) \to g(f(x_0)) = x_0$$

Also:

$$\frac{g(y_n) - g(f(x_0))}{y_n - f(x_0)} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} \text{ für } n \to \infty \text{ (da } x_n \to x_0 \text{ und } x_n \neq x_0)$$

□

Weitere Beispiele

12. Beispiel (Logarithmus):

$$\ln(x) = \exp^{-1}(x)$$

Dann gilt:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \text{ für } x > 0$$

Für $f(x) = \ln|x|$ (wobei $x \neq 0$) gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ für alle } x \neq 0$$

Beweis.

(a) $x > 0 : f(x) = \ln(x)$ (vergleiche oben)
(b) $x < 0 : f(x) = \ln(-x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

□

13. Beispiel (Arcus Sinus):

$$\arcsin : (-1, 1) \to \mathbb{R}$$

Dann gilt:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Aus $\arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ für $x \in (-1, 1)$
folgt $\cos(\arcsin x) > 0$ für $x \in (-1, 1)$.

Also gilt:

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

14. Beispiel (Arcus Cosinus):

$$\arccos : (-1, 1) \to \mathbb{R}$$

Dann gilt entsprechend:

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

15. Beispiel (Tangens):

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Dann gilt:

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

16. Beispiel (Cotangens):

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Dann gilt:

$$\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

17. Beispiel (Arcus Tangens):

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Dann gilt:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

18. Beispiel (Arcus Cotangens):

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

Dann gilt entsprechend:

$$\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

19. Beispiel:

$$f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$$

Dann gilt:

$$f'(x) = \exp'(\alpha \ln x) \cdot \alpha \frac{1}{x} = \frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \ln x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

20. Beispiel:

$$f(x) = \exp_a(x) = \exp(x \ln a) = a^x$$

Dann gilt:

$$f'(x) = \exp'(x \ln a) \cdot \ln a = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

Kapitel 12

Wichtige Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Im Wesentlichen behandelt dieses Kapitel drei Themen: *Extremwerte*, *Mittelwertsätze* und die *Regeln von de l'Hospital*.

Extremwerte

Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ (wobei $D \subset \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$), $x_0 \in D$. f hat in x_0 ein *lokales Maximum* (*Minimum*), wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit:

$$f(x_0) \geq f(x) \ (f(x_0) \leq f(x)) \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \varepsilon$$

f hat in x_0 ein *striktes lokales Maximum* (*Minimum*), wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit:

$$f(x_0) > f(x) \ (f(x_0 < f(x)) \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \varepsilon$$

Allgemein spricht man von einem (*strikten*) *lokalen Extremum*.

Beispiele

1. $f(x) = x^2$ hat ein striktes lokales (sogar globales) Minimum bei $x_0 = 0$.

2. cos hat in $x_0 = 0$ ein striktes lokales Maximum. Dies ist auch ein globales Maximum aber kein striktes globales Maximum.

3. abs hat in $x_0 = 0$ ein striktes lokales (sogar globales) Minimum.

Satz (notwendige Bedingung für ein Extremum). $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei bei $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar und besitze dort ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum, strikt oder nicht strikt). Dann gilt:

$$f'(x_0) = 0$$

Falls f differenzierbar ist, sind Extrema im Innern des Intervalls also nur dort zu erwarten, wo f' verschwindet.

Bemerkung. Die Aussage gilt nicht für $[a, b)$, $[a, b]$ oder $(a, b]$ statt (a, b), falls x_0 ein Randpunkt ist.

Beweis. Sei (z.B.) x_0 ein lokales Minimum.

(a) Für den Fall $x < x_0$ gilt:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to\infty \\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

(b) Für den Fall $x > x_0$ gilt:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to\infty \\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

Daraus folgt $f'(x_0) = 0$ (da Existenz vorausgesetzt wurde).

□

Bemerkung. Achtung! Aus $f'(x_0) = 0$ folgt im Allgemeinen nicht, dass bei x_0 ein Extremum vorliegt: z.B. $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 0$. Um sicher zu sein, dass ein Extremum vorliegt, sind also weitere Untersuchungen nötig.

Satz von Rolle (1652-1719). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$, differenzierbar in (a, b). Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$. (Anschaulich ist dies offensichtlich, denn es gibt mindestens einen Punkt mit horizontaler Tangente.)

Beweis.

(a) f konstant $\Rightarrow f'(x) = 0 \;\; \forall\, x \in (a, b)$

(b) $\exists\, y \in (a, b)$ mit $f(y) > f(a) = f(b) \Rightarrow f$ nimmt in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ sein (globales) Maximum an, d.h. $f(x_0) = 0$.

(c) $\exists\, y \in (a, b)$ mit $f(y) < f(a) = f(b) \Rightarrow \ldots \Rightarrow f(x_0) = 0$.

□

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit:

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Anschaulich: Es gibt einen Punkt $x_0 \in (a, b)$, in dem die Tangente die gleiche Steigung wie die Sekante zwischen a und b hat.

Beweis. Rückführung auf den Satz von Rolle. Sei

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$$

Diese Funktion hat die Eigenschaften:

(a) $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(b) g ist differenzierbar in (a, b).

(c) $g(a) = g(b) = f(a)$.

Mit dem Satz von Rolle folgt:

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \text{ mit } g'(x_0) = 0 \Rightarrow 0 = f'(x_0) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

□

Hieraus ergeben sich einige wichtige Folgerungen.

Folgerungen. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar.

1. Gilt $m \leq f'(x) \leq M$ für alle $x \in (a, b)$, so folgt:

$$m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x) \text{ für alle } a \leq x \leq y \leq b$$

2. Gilt $|f'(y)| \leq C$ für alle $x, y \in (a, b)$, so folgt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y| \text{ für alle } x, y \in [a, b]$$

   Das heißt: f ist *Lipschitzstetig* oder Hölderstetig mit Exponent 1.

3. Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so folgt:

$$f \text{ ist konstant in } [a, b]$$

4. Gilt $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$ so folgt:

$$f = g + \text{ const}$$

Eine einfache Differentialgleichung

Auch eine einfache Differentialgleichung können wir jetzt lösen.

Satz. Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = df$ und $x_0 \in (a, b)$, so gilt:

$$f(x) = Ae^{dx} \text{ mit } A = f(x_0)e^{-dx_0}$$

Die Lösung der *Differentialgleichung* $f' = df$ ist durch den Wert $f(x_0)$, den Anfangswert bei x_0, eindeutig bestimmt.

Beweis.

1. Fall: $f(x) \equiv 0 \Rightarrow$ richtig mit $A = 0$.

2. Fall: $\exists x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) \neq 0$.

   Sei $\mathcal{I} = (a', b')$ das größte Intervall mit $x_0 \in \mathcal{I} \subset (a, b)$ und $f(x) \neq 0$ in $\mathcal{I}$.

   $\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = d$ in $\mathcal{I}$

   $\overset{4}{\Rightarrow} \ln|f(x)| = dx + c$ (denn es gilt: $\ln|f(x)|' = \frac{f'(x)}{f(x)} = d$)

$\Rightarrow\ f(x) = \pm e^c e^{dx}$ in $\mathcal{I}$ mit geeignetem c.

Für $x = x_0$ folgt:

$$f(x_0) = \pm e^c e^{dx_0},\ \text{d.h. } A = \pm e^c = f(x_0)e^{-dx_0}$$

Wäre $a' > a$, so müsste $f(a') = 0$ gelten im Widerspruch zu:

$$f(a') = \lim_{x \to a'+} f(x) = Ae^{da'} \neq 0$$

Ebenso folgt $b' = b$.

□

Extremwerte

Zurück zur Suche nach Extremwerten.

Satz. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in (a,b). Sei $f'(x) \geq 0$ (> 0, ≤ 0, < 0) für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f wachsend (strang wachsend, fallend, streng fallend).

Beweis. $x_1 < x_2 \Rightarrow \exists\ x_0 \in (x_1, x_2)$ mit:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x_0) = \begin{cases} \geq 0 \\ > 0 \\ \leq 0 \\ < 0 \end{cases}$$

□

Satz (hinreichende Bedingung für strikte lokale Extrema). $f(a,b) \to \mathbb{R}$, differenzierbar nahe $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$, f' differenzierbar bei x_0 mit $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$). Dann besitzt f bei x_0 ein striktes lokales Maximum (Minimum).

Bemerkung. Diese Bedingung ist nicht notwendig, z.B. hat $f(x) = x^4$ bei $x_0 = 0$ ein striktes Maximum, obwohl $f''(0) = 0$ gilt.

Beweis. O.E. sei $f''(x_0) < 0$. Aus:

$$\lim_{x \to x_0} \tfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) < 0$$

folgt:

$$\exists\ \delta > 0\ \ \forall\ x \text{ mit } |x - x_0| < \delta\ \ \tfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Daraus folgt:

$$f'(x) < f'(x_0) = 0 \quad \text{für } x_0 < x < x_0 + \delta$$

$$f'(x) > f'(x_0) = 0 \quad \text{für } x_0 - \delta < x < x_0$$

Also ist f streng wachsend in $[x_0 - \delta, x_0]$, streng fallend in $[x_0, x_0 + \delta]$, d.h. f besitzt ein lokales Maximum bei x_0.

□

Beispiel

$$p(x) = x^4 - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2$$
$$p'(x) = 4x^3 - 4x^2 + x = 4x\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\right) = 4x\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2$$

Die Nullstellen von p' sind: $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}$.

$$p''(x_1) = 1 > 0 \text{ und } p''(x_2) = 0$$

$p(x_1) = 0$ ist ein striktes lokales Minimum. x_2 kann kein Minimum sein, sonst müsste zwischen x_1 und x_2 ein Maximum liegen. Es kann auch kein Maximum sein, denn da $p(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$ gilt, müsste sonst ein weiteres Minimum existieren.

Erweiterter Mittelwertsatz

Satz (erweiterter Mittelwertsatz). Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in (a, b), $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit:

$$\tfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \tfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Der obige Mittelwertsatz ist ein Spezialfall hiervon mit $g = \mathrm{id}$.

Beweis. Sei:

$$F(x) := g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$$

F hat die Eigenschaften:

(a) $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(b) f ist differenzierbar in (a, b).

(c) $F(a) = F(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$.

Mit dem Satz von Rolle folgt:

$$\exists\ x_0 \in (a, b) \text{ mit } F'(x_0) = 0$$
$$\Rightarrow 0 = g'(x_0)(f(b) - f(a)) - f'(x_0)(g(b) - g(a))$$

Wenn gezeigt ist, dass $g(b) \neq g(a)$ gilt, folgt hieraus die Behauptung. Tatsächlich existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\tilde{x} \in (a, b)$ mit:

$$g(b) - g(a) = \underbrace{g'(\tilde{x})}_{\neq 0}(b - a) \neq 0$$

$\square$

Regeln von de l'Hospital

Abschließend noch einige nützliche Regeln zur Bestimmung von Grenzwerten:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (wenn } \lim f(x) = \lim g(x) = 0 \text{ oder } \pm\infty \text{ gilt)}$$

Satz (Regel von de l'Hospital 1661-1704). Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar nahe a, $f(a) = g(a) = 0$, $g'(x) \neq 0$ für x nahe a.

$$\text{Existiert } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ so existiert auch } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ und es gilt}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{(entsprechend für } x \to b)$$

Beweis. Nach dem erweiterten Mittelwertsatz existiert ein ξ_x mit $a < \xi_x < x$ und:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Für $x \to a$ gilt auch $\xi_x \to a$, also:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Beispiele

1. Beispiel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

2. Beispiel:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x \sin x} = 0 \end{aligned}$$

Satz. $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar (nahe ∞), $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \to \infty$, $g'(x) \neq 0$ für große x.

$$\text{Existiert } \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ so existiert auch } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ und es gilt}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{(entsprechend für } x \to -\infty)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g\left(\frac{1}{y}\right)} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{-y^{-2} f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-y^{-2} g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

□

Etwas komplizierter ist der Fall $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$.

Satz. $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar nahe a, $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ für $x \to a$, $g'(x) \neq 0$ nahe a.

$$\text{Existiert } \lim_{x\to a} \tfrac{f'(x)}{g'(x)} \text{ so existiert auch } \lim_{x\to a} \tfrac{f(x)}{g(x)} \text{ und es gilt}$$

$$\lim_{x\to a} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \tfrac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{(entsprechend für } x \to b \text{ und } x \to \pm\infty)$$

Beweis. Sei $\lambda := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, d.h.:

$$\forall\, \varepsilon > o \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \text{ mit } |x-a| < \delta \quad \left|\tfrac{f'(x)}{g'(x)} - \lambda\right| < \varepsilon$$

Also gilt für alle x, y mit $|x-a| < \delta$, $|y-a| < \delta$ und mit ξ zwischen x und y:

$$\left|\tfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \lambda\right| = \left|\tfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}} - \lambda\right| < \varepsilon \text{ für } |x-a| < \delta \text{ und } |y-a| < \delta$$

$$\Rightarrow \left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \lambda - \tfrac{f(y)}{g(x)} + \lambda\tfrac{g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon\left|1 - \tfrac{g(y)}{g(x)}\right| \text{ für } |x-a| < \delta \text{ und } |y-a| < \delta$$

$\Rightarrow$ Mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| &\leq \left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \lambda - \tfrac{f(y)}{g(x)} + \lambda\tfrac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\tfrac{f(y)}{g(x)} + \lambda\tfrac{g(y)}{g(x)}\right| \\ &< \varepsilon\left|1 - \tfrac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\tfrac{f(y)}{g(x)} + \lambda\tfrac{g(y)}{g(x)}\right| \\ &\quad \text{für } |x-a| < \delta \text{ und } |y-a| < \delta\end{aligned}$$

Halten wir hier y fest (das links nicht vorkommt) und lassen $x \to a$ gehen, so folgt (für x nahe bei a):

$$\left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| < 2\varepsilon \text{ für } |x-a| < \delta' (= \delta'(\varepsilon))$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt:

$$\tfrac{f(x)}{g(x)} \to \lambda \text{ für } x \to a$$

□

Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{x^n}{e^{\alpha x}} = \lim_{x\to\infty} \tfrac{nx^{n-1}}{\alpha e^{\alpha x}} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \tfrac{n!}{\alpha^n e^{\alpha x}} = 0$$

oder:

$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{e^{\alpha x}}{x^n} = \infty \text{ (Das wussten wir schon!)}$$

Kapitel 13

Das Riemannintegral

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, zunächst $f \geq 0$. Kann der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von f ein Flächeninhalt $I_{a,b}(f)$ zugeordnet werden? Falls f das Vorzeichen wechselt, sollen die Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ gerechnet werden.

Man wird die folgenden Eigenschaften erwarten:

(a) $f(x) \equiv C$ in $[a,b] \Rightarrow I_{a,b}(f) = c(b-a)$

(b) $[a,b] = [a,c] \cup [c,b] \Rightarrow I_{a,b}(f) = I_{a,c}(f) + I_{c,b}(f)$

(c) $f \leq g \Rightarrow I_{a,b}(f) \leq I_{a,b}(g)$ (Monotonie)

Das Integral von Treppenfunktionen

Wir definieren zunächst $I_{a,b}(f)$ für Treppenfunktionen.

Definition. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt eine *Treppenfunktion*, wenn es *Zerlegungspunkte* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

gibt mit $f(x) \equiv c_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Der Funktionswert in den Zerlegungspunkten spielt keine Rolle. Insbesondere ist die konstante Funktion eine Treppenfunktion.

Bemerkung. Die Menge $T(a,b)$ der Treppenfunktionen auf $[a,b]$ bildet einen (reellen) Vektorraum.

Es ist naheliegend, für eine solche Treppenfunktion f zu definieren:

$$I_{a,b}(f) := \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})$$

Natürlich kann man eine Treppenfuktion auf verschiedene Arten (verschiedene Wahl der Zerlegungspunkte) darstellen. Offensichtlich hängt aber $I_{a,b}(f)$ nicht von dieser Wahl ab.

Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ für } I_{a,b}(f)$$

D.h. Integral der Funktion f über das Intervall $[a, b]$ (oder mit den Grenzen a und b). Dabei bedeutet:

1. $\int$ = stilisiertes S von Summe
2. x = Integrationsvariable (kann natürlich beliebig sein)
3. a, b = untere und obere Integrationsgrenze
4. $\mathrm{d}x$ = erinnert an x-Differenz (Δx), macht hier deutlich, welches die Integrationsvariable ist und kennzeichnet das Ende des Integrals (häufig wird $\int \mathrm{d}x f(x)$ geschrieben, was aber problematisch ist).

Satz. Für $f, g \in T(a, b)$, $c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\int_a^b (cf(x) + dg(x))\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + d\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (linear)

(b) $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ (monoton)

speziell: $0 \leq f \Rightarrow \int f \geq 0$ (positiv)

Das Integral ist also ein *positives lineares Funktional* (zunächst auf $T(a, b)$).

Das Integral von beschränkten Funktionen

Wir wollen nun das Integral auf eine größere Klasse von Funktionen ausdehnen. Dazu sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt (sonst hat das folgende keinen Sinn). Wir definieren:

Definition.

(a) *Oberintegral* von f über $[a, b]$:

$$\int_a^{b\,\star} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{I_{a,b}(\varphi) \,:\, \varphi \in T(a, b),\ \varphi \geq f\}$$

(b) *Unterintegral* von f über $[a, b]$:

$$\int_{a\,\star}^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{I_{a,b}(\varphi) \,:\, \varphi \in T(a, b),\ \varphi \leq f\}$$

Problem. Warum existieren inf und sup?

1. Die Mengen, über die inf/sup zu bilden ist, sind nicht leer: Ist $|f| \leq C$, so ist $\varphi(x) \equiv C$, $I_{a,b}(\varphi) = C(b - a)$ in der ersten Menge enthalten und $\psi(x) \equiv -C$, $I_{a,b}(\psi) = -C(b - a)$ in der zweiten.

2. Im ersten Fall ist stets $\varphi \geq -C$, also ist die Menge durch $-C(b-a)$ nach unten beschränkt. Im zweiten Fall ist stets $\psi \leq C$, also die Menge durch $C(b-a)$ nach oben beschränkt.

Bemerkung. Offensichtlich gilt $\int_\star \leq \int^\star$.

Definition (Riemannintegral). Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar* (hier auch kurz: integrierbar), wenn gilt:

$$\int_{\star a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\star b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Man definiert dann das *Integral* von f über $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{\star a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\star b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiele

1. Jedes $f \in T(a,b)$ ist integrierbar. Das Integral stimmt mit dem oben definierten überein (f selbst ist ein zulässiges φ und ein zulässiges ψ).

2. Die Dirichletfunktion:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

   ist nicht integrierbar. Jedes $\varphi \in T(a,b)$ mit $\varphi(x) \geq f$ ist ≥ 1, also $\int^\star = 1$. Jedes $\psi \in T(a,b)$ mit $\psi(x) \leq f$ ist ≤ 0, also $\int_\star = 0$. Daraus folgt $\int^\star \neq \int_\star$.

3. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ ist integrierbar mit:

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}$$

   Wähle Treppen aus, die knapp über bzw. unter f liegen, z.B.:

$$\varphi_n(x) = \tfrac{k}{n} \text{ für } \tfrac{k-1}{n} < x < \tfrac{k}{n} \text{ und } \psi_n(x) = \tfrac{k-1}{n} \text{ für } \tfrac{k-1}{n} < x < \tfrac{k}{n}$$

   Daraus folgt:

$$\int \varphi_n = \tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{n} = \tfrac{n(n+1)}{2n^2} \to \tfrac{1}{2}$$

$$\int \psi_n = \tfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{k}{n} = \tfrac{(n-1)n}{2n^2} \to \tfrac{1}{2}$$

Offensichtlich gilt:

Satz (Integrabilitätskriterium). Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ existieren, mit $\psi \leq f \leq \varphi$ und:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

Beispiele

4. Die Funktion (modifizierte Dirichletfunktion):

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

ist integrierbar: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt nur endlich viele Punkte $\frac{p}{q}$ mit $q < \frac{2}{\varepsilon}$. Um diese Punkte wähle man Intervalle der Gesamtlänge $< \frac{\varepsilon}{2}$. $\varphi(x)$ sei 1 in diesen Intervallen, $\frac{\varepsilon}{2}$ sonst, also:

$$I_{a,b}(\varphi) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Andererseits ist $\psi \equiv 0$ eine Treppenfunktion $\leq f$ und $I_{a,b}(\psi) = 0$. Also:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Von Bedeutung ist insbesondere:

Satz. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ ist integrierbar.

Zum Beweis benötigen wir noch einen Begriff, für dessen Einführung bisher kein Bedarf bestand. Wir erinnern zunächst an die Definition der Stetigkeit von f:

$$\forall\, x\ \ \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta = \delta(x,\varepsilon) > 0\ \ \forall\, y \text{ mit } |x-y| < \delta\ \ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Zum Unterschied dazu definieren wir jetzt: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall\, x, y \text{ mit } |x-y| < \delta\ \ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Ein Beispiel:

$f : (0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Satz. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis. Annahme: f ist nicht gleichmäßig stetig.

$$\Rightarrow\ \exists\, \varepsilon > 0\ \ \forall\, \delta > 0\ \ \exists\, x, y \text{ mit } |x-y| < \delta \text{ und } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, x_n, y_n \text{ mit } |x_n - y_n| < \tfrac{1}{n} \text{ und } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

Die Folge (x_n) ist beschränkt.

$\Rightarrow$ (nach Bolzano-Weierstraß) $\exists$ Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x \in [a,b]$, also auch $y_{n_k} \to x$.

$\Rightarrow$ (da f stetig ist) $\lim f(x_{n_k}) = f(x) = \lim f(y_{n_k})$, Widerspruch.

□

Beweis des obigen Satzes. Es gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x, y \text{ mit } |x - y| < \delta \quad |f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{b-a}$$

Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{b-a}{n} < \delta$. Nun definiere:

$$x_0 = a,\; x_1 = a + \tfrac{b-a}{n},\; x_2 = a + 2\tfrac{b-a}{n},\; \ldots,\; x_{n-1} = (n-1)\tfrac{b-a}{n},\; x_n = b$$

(oder eine beliebige andere Zerlegung mit maximaler Intervalllänge $< \delta$)

Daraus folgt, dass für alle k gilt:

$$\max_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x) - \min_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x) < \tfrac{\varepsilon}{b-a}$$

Mit:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \max_{x_{k-1} \le t \le x_k} f(t) \\ \psi(x) &= \min_{x_{k-1} \le t \le x_k} f(t) \end{aligned}\right\} \text{ für } x \in (x_{k-1}, x_k)$$

folgt:

$$\varphi \le f \le \psi,\; \int (\varphi - \psi)\, \mathrm{d}x \le \tfrac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

$\square$

Satz. $\int : R(a,b) \to \mathbb{R}$ ist ein positives lineares Funktional.

Raum der integrierbaren Funktionen (ein Vektorraum)

Beweis.

(a) *positiv*: $f \ge 0 \Rightarrow \psi \equiv 0$ ist Treppenfunktion mit $\psi \le f \Rightarrow \int f = \int_\star f \ge 0$

(b) *linear* (insbesondere ist $R(a,b)$ ein Vektorraum):

α) *Behauptung.* $f \in R(a,b) \Rightarrow cf \in R(a,b)$

Aus $\psi \le f \le \varphi,\; \int \varphi - \int \psi \le \frac{\varepsilon}{|c|}$ folgt:

$$\left.\begin{aligned} c\psi \le cf \le c\varphi \text{ und } \int c\varphi - \int c\psi \le \varepsilon \text{ für } c > 0 \\ c\varphi \le cf \le c\psi \text{ und } \int c\psi - \int c\varphi \le \varepsilon \text{ für } c < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow cf \in R(a,b)$$

β) *Behauptung.* $f, g \in R(a,b) \Rightarrow f + g \in R(a,b)$.

Aus:

$$\psi_f \le f \le \varphi_f,\; \psi_g \le g \le \varphi_g,$$
$$\int \varphi_f - \int \psi_f \le \tfrac{\varepsilon}{2},\; \int \varphi_g - \int \psi_g \le \tfrac{\varepsilon}{2}$$

folgt:

$$\psi_f + \psi_g \le f + g \le \varphi_f + \varphi_g \text{ und } \int(\varphi_f + \varphi_g) - \int(\psi_f + \psi_g) \le \varepsilon$$
$$\Rightarrow f + g \in R(a,b)$$

Die Aussagen $\int cf = c \int f$ und $\int (f+g) = \int f + \int g$ folgen mit Hilfe der Riemannsummen.

□

Satz (Riemannsummen). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei integrierbar. Ist (Z_n) eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$:

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_{k_n}^{(n)} = b,\ \tilde{x}_j^{(n)} \in [x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}]$$

Wenn:

$$\delta_n := \max_{j=1,\ldots,k_n} \left| x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)} \right| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

so gilt:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k(n)} f(\tilde{x}_j^{(n)})(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)})}_{\text{Riemannsummen}} \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

oder: $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0$ so, dass $\left|\sum - \int\right| < \varepsilon$ zu jeder Zerlegung mit maximaler Intervalllänge $< \delta$.

Beweis. Im allgemeinen Fall ist das recht kompliziert. Für stetige Funktionen folgt dies leicht, da die Riemannsummen zwischen den zur jeweiligen Zerlegung gehörigen Integralen über ψ und φ liegen.

□

Satz. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei integrierbar. Dann gilt:

$$F : [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ ist Lipschitzstetig.}$$

Bemerkung. Aus Lipschitzstetig folgt insbesondere auch stetig.

Beweis. $|f| \le C \Rightarrow |F(x) - F(y)| \le |x-y|\, C$ □

Folgerung. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über jedes abgeschlossene Intervall integrierbar. Dann:

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ ist stetig}$$

Gleichmäßige Konvergenz

Sei $\mathcal{I}$ ein beliebiges Intervall, (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$. Die Folge heißt *gleichmäßig konvergent* gegen $f : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$, wenn gilt:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\ n \ge n_0,\ x \in \mathcal{I}\quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Satz. f_n stetig, $f_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow f$ stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in \mathcal{I}$ und $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \exists\, n_0 \;\; \forall\, n \geq n_0,\, x \in \mathcal{I} \quad |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{und: } \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in \mathcal{I},\, |x - x_0| < \delta \quad |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|$$

$$= \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

Satz. Seien $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$, alle f_n Riemannintegrierbar, $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann ist auch f Riemannintegrierbar und es gilt $\int f_n \to \int f$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt:

$$\exists\, n_0 \;\; \forall\, x \in [a,b] \quad |f(x) - f_{n_0}(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

und

$$\exists\, \varphi, \psi \in T(a,b) \text{ mit } \psi \leq f_{n_0} \leq \varphi \text{ und } \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Definiere:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &:= \psi - \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\psi} \leq f_{n_0} - \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq f \\ \tilde{\varphi} &:= \varphi + \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\varphi} \geq f_{n_0} + \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)} \geq f \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\int \tilde{\varphi} - \int \tilde{\psi} = \int (\tilde{\varphi} - \varphi) + \int (\varphi - \psi) + \int (\psi - \tilde{\psi}) \leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Also ist f integrierbar.

Außerdem gilt:

$$\left| \int f_n - \int f \right| \leq \int |f_n - f| \leq \int |f_n - f| \leq (b-a) \sup |f_n - f| \to 0$$

da $f_n \to f$ gleichmäßig.

□

Monotone Funktionen

Abschließend noch eine weitere wichtige Klasse integrierbarer Funktionen:

Satz. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist f integrierbar.

Folgerung. Natürlich ist auch jede stückweise monotone Funktion integrierbar.

Beweis des Satzes. Wähle folgende Zerlegung Z_N:

$$a = x_0,\;\; x_k = a + k\tfrac{b-a}{N},\;\; x_N = b$$

O.B.d.A. sei f wachsend.

$$\varphi_N(x) = f(x_k) \text{ für } x_{k-1} < x < x_k$$
$$\psi_N(x) = f(x_{k-1}) \text{ für } x_{k-1} < x < x_k$$

Daraus folgt:

$$\int(\varphi - \psi)\,\mathrm{d}x = \tfrac{b-a}{N} \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$
$$= \tfrac{b-a}{N}(f(b) - f(a)) \to 0 \text{ für } N \to \infty$$

□

Kapitel 14

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Integrationsmethoden

Hauptziel dieses Abschnitts ist die explizite Berechnung von Integralen (insbesonderer stetiger Funktionen). Dazu dient ein wichtiger Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation (Hauptsatz).

Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) $\exists\, \xi \in (a, b)$ mit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b - a)f(\xi)$

(b) $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\varphi \geq 0$. Dann gilt:

$$\exists\, \xi \in (a, b) \text{ mit } \int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis.

(a) Ist Spezialfall von (b) mit $\varphi \equiv 1$.

(b) Definiere:

$$m := \min\{f(x) : x \in [a, b]\},\ M := \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

Dann gilt wegen $m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$:

$$m \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Daraus folgt:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x} \leq M \quad (\text{falls } \textstyle\int \varphi \neq 0, \text{ der Fall } \int \varphi = 0 \text{ ist klar})$$

Nach dem Zwischenwertsatz gilt:

$$\exists\, \xi \in (a, b) \text{ mit } f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x}$$

□

Wir hatten gesehen, dass $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ für jede integrierbare Funktion stetig (sogar Lipschitzstetig) von x abhängt. Für stetiges f gilt mehr:

Satz. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in [a,b]$, $F(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in [a,b]$ (dabei ist $\int_c^x = -\int_x^c$ für $x < c$). Dann gilt: F ist differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$.

Beweis. Für $h \neq 0$ gilt:

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \frac{1}{h}\left\{\int_c^{x+h} - \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{MWS}}{=} \frac{1}{h} h f(\xi_{x,h})$$

mit $\xi_{x,h}$ zwischen x und $x+h$. Für $h \to 0$ gilt also:

$$\xi_{x,h} \to 0,\ f(\xi_{x,h}) \to f(x) \Rightarrow F \text{ differenzierbar mit } F'(x) = f(x)$$

□

Definition. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt eine *Stammfunktion* von f, wenn F differenzierbar ist mit $F' = f$. Der obige Satz besagt also, dass für stetiges f die Funktion $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion ist.

Satz. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, F eine Stammfunktion von f. Eine Funktion $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Stammfunktion von f, wenn $F - G$ konstant ist.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} F - G \text{ konstant} \quad &\Leftrightarrow \quad F' - G' = (F-G)' = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad G' = F' = f, \text{ d.h. } G \text{ ist Stammfunktion} \end{aligned}$$

□

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, F eine (beliebige) Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c) \text{ für } a \le c < d \le b$$

Beweis. $F_0(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist eine Stammfunktion von f. Also ist $F - F_0$ konstant und somit:

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = F_0(d) - F_0(c) = F(d) - F(c)$$

□

Schreibweisen.

(a) $F(x)\,|_c^d := F(d) - F(c)$

(b) $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ (ohne Grenzen) $:\Rightarrow F$ ist Stammfunktion von f

Zunächst erlaubt dieser Satz nur die Integration von Funktionen, die wir zwar als Ergebnis einer Differentiation erhalten haben. Die *Kunst des Integrierens* besteht darin, durch *trickreiche* Umformung zu solchen Funktionen zu gelangen.

Beispiele

1. Beispiel:

$$\int x^s \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{s+1} x^{s+1} & \text{für } s \neq -1 \\ \ln|x| & \text{für } s = -1 \end{cases}$$

   Aber natürlich nur, so weit x^s stetig ist, also für:

   (a) $s \in \mathbb{N}_0$: in ganz $\mathbb{R}$
   (b) $s \in \mathbb{R}$: in $(0, \infty)$ wobei $x^s := \exp(s \ln x)$
   (c) $s \in \mathbb{Z}$: in $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

   Entsprechend kann hiermit $\int_a^b x^s \,\mathrm{d}x$ nur dann berechnet werden, wenn $[a, b]$ ganz in der entsprechenden Menge enthalten ist.

2. Beispiel:

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$$

3. Beispiel:

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x$$

4. Beispiel:

$$\int \exp(x) \,\mathrm{d}x = \exp(x)$$

5. Beispiel:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin(x) \text{ oder } -\arccos(x)$$

6. Beispiel:

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan(x) \text{ oder } -\operatorname{arccot}(x)$$

7. Beispiel:

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x = \tan x$$

   (für x mit $\cos x \neq 0$, d.h. $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$)

8. Beispiel

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \,\mathrm{d}x = -\cot x$$

   (für x mit $\sin x \neq 0$, d.h. $x \neq k\pi$)

Integrationsregeln

Nun zu den Tricks ...

Substitutionsregel

Satz. Sei $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\varphi(\mathcal{I}) \subset \mathcal{J}$. Dann gilt:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \qquad \text{Stammfunktion von } f$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x\,\Big|_{x=\varphi(t)} \qquad \text{Stammfunktion von } (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$$

Speziell:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis.

(a) 1. Formel:

Sei G Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ (z.B. $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$). Dann ist:

$$\begin{aligned}
(G \circ \varphi^{-1})'(x) &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) \\
&= G'(\varphi^{-1}(x))\tfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\
&= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\tfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\
&= f(x), \text{ d.h. } G \circ \varphi^{-1} \text{ ist Stammfunktion von } f
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(b)) - G(\varphi^{-1}(a)) = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) 2. Formel:

Sei F Stammfunktion von f. Dann ist:

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$
$$\text{d.h. } F \circ \varphi \text{ ist Stammfunktion von } (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$$

Daraus folgt:

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Beispiele

9. Beispiel:

$$\int_a^b f(\underbrace{t+c}_{\varphi(t)})\,\mathrm{d}t = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x$$

denn es gilt: $\varphi(t) = t + c$ und $\varphi'(t) = 1$

10. Beispiel:

$$\int_a^b f(ct)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_a^b f(\underbrace{ct}_{\varphi(t)})c\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ für } c \neq 0$$

denn es gilt: $\varphi(t) = ct$ und $\varphi'(t) = c$

11. Beispiel:

$$\int_a^b tf(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b f(\underbrace{t^2}_{\varphi(t)})2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{bzw. } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} tf(t^2)\,\mathrm{d}t$$

denn es gilt: $\varphi(t) = t^2$ und $\varphi'(t) = 2t$

12. Beispiel:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|g(x)| \text{ da } (\ln|g(x)|)' = \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ ist}$$

logarithmische Ableitung von g

Man kann sich aber auch $\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t$ aus $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ enstanden denken durch die Substitution $x = \varphi(t) := g(t)$.

Allgemeiner:

$$\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) = f \circ g(x)$$

oben ist: $f(t) = \ln|t|$

13. Beispiel:

Berechnung der *Fläche des Kreises* (ohne wesentliche Einschränkung die Fläche des Einheitskreises). Sei zunächst $-1 < a < b < 1$. Wir berechnen:

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Substitution mit $\varphi(t) = \sin t$ und $\varphi'(t) = \cos(t)$

$$= \int\limits_{\arcsin a}^{\arcsin b} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t \,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\text{Additionstheorem}}$$

$$= \int\limits_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos^2 t \,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\text{Es gilt: } \cos^2 t = \tfrac{1}{2}(\cos^2 t - \sin^2 t) + \tfrac{1}{2}(\cos^2 t + \sin^2 t) = \tfrac{1}{2}(\cos 2t + 1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos 2t + 1 \,\mathrm{d}t = \left(\tfrac{1}{4}\sin 2t + \tfrac{1}{2}t\right)\Big|_{\arcsin a}^{\arcsin b}$$

$$\boxed{\text{Es gilt: } \sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} \Rightarrow \sin 2t\,\big|_{\arcsin a}^{\arcsin b} = 2t\sqrt{1-t^2}\,\Big|_a^b}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(t - \sqrt{1-t^2} + \arcsin t\right)\Big|_a^b$$

Damit erhalten wir für die halbe Kreisfläche:

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to 1\\ b\to -1}} \frac{1}{2}\left(\underbrace{b\sqrt{1-b^2}}_{\to 0} + \arcsin b - \underbrace{a\sqrt{1-a^2}}_{\to 0} - \arcsin a\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right) = \tfrac{\pi}{2}$$

Betrachte nun einen Kreis mit Radius r. Mit Beispiel 10 folgt für den Halbkreis:

$$\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x = r\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{r^2-r^2x^2}\,\mathrm{d}x = r^2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{\pi}{2}r^2$$

Damit folgt, dass die Kreisfläche πr^2 beträgt.

Partielle Integration

Eine weitere einfache, extrem wichtige Technik liefert die partielle Integration.

Satz. $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar (das bedeutet differenzierbar mit stetiger Ableitung). Dann gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\,\big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{bzw. } \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. $F(x) := f(x)g(x)$ ist Stammfunktion von $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Also gilt nach dem Hauptsatz:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = f(x)g(x)\,|_a^b$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

Beispiele

14. Beispiel:

$$\int x^n e^x\,\mathrm{d}x = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= x^n e^x - nx^{n-1}e^x + n(n-1)\int x^{n-2}e^x\,\mathrm{d}x$$

Man sieht, wenn man dies so weiterführt, kommt man schließlich zu einem Term mit $\int e^x\,\mathrm{d}x$, der lösbar ist. Zum Beispiel:

(a) $\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x$

(b) $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$

15. Beispiel:

$$\int x^a \ln x \quad (\text{wobei } a \in \mathbb{R})$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(a) Fall: $a = -1$.

$$\int \tfrac{1}{x}\ln x\,\mathrm{d}x = (\ln x)^2 - \int \ln x \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \tfrac{1}{x}\ln x = \tfrac{1}{2}(\ln x)^2$$

(b) Fall $a \neq -1$.

$$\int x^a \ln x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x - \tfrac{1}{a+1}\int x^{a+1-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x - \tfrac{1}{(a+1)^2}x^{a+1}$$

Also gilt zum Beispiel:

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

16. Beispiel:

$$\arctan x\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\arctan x\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \int \tfrac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\arctan x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

17. Beispiel:

$$\int \operatorname{arccot} x\,\mathrm{d}x = \ldots = x\,\operatorname{arccot} x + \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

18. Beispiel:

$$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arcsin x \,\mathrm{d}x = x \arcsin x - \int \tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$$
$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

19. Beispiel:

$$\int \arccos x \,\mathrm{d}x = \ldots = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

20. Beispiel:

$$\mathcal{J}_m := \int \sin^m x \,\mathrm{d}x = \,?$$

Für $m = 2$ vergleiche auch Beispiel 13. Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_m &= -\int \sin^{m-1} x(-\sin x) \,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{m-2} x \,\mathrm{d}x \\
&= -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1)\mathcal{J}_{m-2} - (m-1)\mathcal{J}_m
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Rekursionsformel:

$$\mathcal{J}_m = -\tfrac{1}{m} \cos x \sin^{m-1} x + \tfrac{m-1}{m} \mathcal{J}_{m-2}$$

Mit:

$$\mathcal{J}_0 = \int 1 \,\mathrm{d}x = x \text{ und } \mathcal{J}_1 = \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$$

lassen sich alle weiteren $\mathcal{J}_m$ rekursiv berechnen:

(a) $\mathcal{J}_2 = -\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x$
(b) $\mathcal{J}_3 = -\frac{1}{3} \cos x \sin^2 x - \frac{2}{3} \cos x$
(c) ...

21. Beispiel:

Völlig analog kann man $\mathcal{I}_m = \int \cos^m x \,\mathrm{d}x$ berechnen:

$$\mathcal{I}_m = \tfrac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \tfrac{m-1}{m} \mathcal{I}_{m-2}$$

wobei:

$$\mathcal{I}_0 = x \text{ und } \mathcal{I}_1 = \sin x$$

Wie eben lassen sich also alle weiteren $\mathcal{I}_m$ rekursiv berechnen:

(a) $\mathcal{I}_2 = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x$
(b) ...

Kapitel 15

Integration (gebrochen) rationaler Funktionen

Dieses Kapitel liegt separat als PDF Dokument vor.

Kapitel 16

Die hyperbolischen Funktionen

Man beachte die formale Analogie zu den trigonometrischen Funktionen.

Cosinus hyperbolicus	$\cosh x := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$	für $x \in \mathbb{R}$
Sinus hyperbolicus	$\sinh x := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$	für $x \in \mathbb{R}$
Tangens hyperbolicus	$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$	für $x \in \mathbb{R}$
Cotangens hyperbolicus	$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$	für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Eine leichte Rechnung ergibt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Außerdem folgt:

$$\begin{gathered}\cosh' = \sinh,\ \sinh' = \cosh,\\ \tanh' = \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2,\\ \coth' = -\frac{1}{\sin^2} = 1 - \coth^2\end{gathered}$$

Diese Funktinen sind nützlich zur Berechnung gewisser Integrale:

$$\int \ldots \sqrt{x^2-1} \ldots \,\mathrm{d}x \xrightarrow[x = \cosh t]{} \int \ldots \sinh t \ldots \sinh t \,\mathrm{d}t \Big|_{t=\cosh^{-1} x}$$

$$\int \ldots \sqrt{x^2+1} \ldots \,\mathrm{d}x \xrightarrow[x = \sinh t]{} \int \ldots \cosh t \ldots \cosh t \,\mathrm{d}t \Big|_{t=\sinh^{-1} x}$$

Umkehrfunktionen

Wir brauchen also auch die Umkehrfunktionen:

(a) cosh ist strikt wachsend in $[0,\infty)$ (denn $\cosh'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0$ für alle $x \in [0,\infty)$) und bildet $[0,\infty)$ auf $[1,\infty)$ ab. Es gibt also die Umkehrfunktion:

$$\textit{Area Cosinus hyperbolicus}, \operatorname{arcosh} : [1,\infty) \to [0,\infty)$$

(b) sinh ist strikt wachsend auf ganz $\mathbb{R}$ und bildet $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ ab. Es gibt also die Umkehrfunktion:

$$\textit{Area Sinus hyperbolicus}, \operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Die Ableitungen der Umkehrfunktionen:

(a) $\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{arcosh} x)} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \operatorname{arcosh} x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(b) $\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(c) $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-\tanh^2 \operatorname{artanh} x} = \frac{1}{1-x^2}$ (für $|x| < 1$)

(d) $\operatorname{arcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (für $|x| > 1$)

Was hat dies mit Hyperbeln zu tun?

Erinnerung. Ist am Einheitskreis t der Winkel im Bogenmaß $= 2 \times$ Fläche des Sektors, so gilt für die Fläche F des Sektors:

$$F = \tfrac{1}{2}t = \tfrac{1}{2}\arcsin y \text{ wobei } y = \sin(2F)$$
$$F = \tfrac{1}{2}\arccos x \text{ wobei } x = \cos(2F)$$

Betrachten wir jetzt die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ (genauer: ihren rechten Zweig). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \tfrac{1}{2}xy - \int_1^x \sqrt{s^2-1}\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \int_{0=\operatorname{arcosh} 1}^{\operatorname{arcosh} x} \sinh^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \left[-\tfrac{t}{2} + \tfrac{1}{2}\cosh t + \sqrt{\cosh^2 t - 1}\right]_0^{\operatorname{arcosh} x} \\
&= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arcosh} x - \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} \\
&= \tfrac{1}{2}\operatorname{arcosh} x
\end{aligned}$$

Denn es gilt:

(a) $\int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \cosh t \sinh t - \int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t$ (wobei $\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$)

(b) $2\int \sinh^2 t\,\mathrm{d}t = \cosh t \sinh t - t$ (wobei $\sinh t = \sqrt{\cosh^2 t - 1}$)

Auf dem enstprechenden Wege gelangt man zu dem Resultat $F(y) = \frac{1}{2}\operatorname{arsinh} y$. Damit erhält man schließlich für die Hyperbel (rechter Zweig) die Parameterdarstellung:

$$(\cosh t, \sinh t)$$

wobei t die doppelte Fläche des entsprechenden Gebietes ist.

Kapitel 17

Der Satz von Taylor

Sei $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) $n+1$-mal stetig differenzierbar, $a \in \mathcal{I}$. Es gibt dann ein Polynom n-ten Gerades $p_n(x) =: T_{f,a}^{(n)}(x)$ mit:

$$p_n^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$$

Dies ist gegeben durch:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

$p_n = T_{f,a}^n$ heißt das *Taylorpolynom* der Ordnung n für die Funktion f zum *Entwicklungspunkt* a.

Speziell:

$$\begin{aligned} n = 0: &\quad p_0(x) = f(0) \quad \text{(konstant)} \\ n = 1: &\quad p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \end{aligned}$$

Definition. $R_n = f(x) - T_{f,a}^{(n)}(x)$ heißt das *Restglied der Ordnung n.*

Das Restglied beschreibt, wie genau $T_{f,a}^{(n)}$ mit f übereinstimmt. Natürlich ist das Taylorpolynom nur dann interessant, wenn man etwas über das Restglied aussagen kann.

Satz (Taylorsche Formel). Es gilt unter den obigen Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \tfrac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

mit einem ξ zwischen a und x. Bei letzterer Darstellung handelt es sich um die Lagrangesche Form des Restglieds. (Beachte: Das Lagrangesche Restglied sieht genau wie das Glied $(n+1)$-ter Ordnung der Taylorentwicklung aus, es ist lediglich a ersetzt durch die Zwischenstelle ξ.)

Beweis durch Induktion nach n.

(a) $n = 0$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = p_0(x) + \tfrac{1}{0!} f'(\xi)(x-a)$$

(b) $n - 1 \Rightarrow n$. Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x) &= \tfrac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_a^x f^{(n)}(t)\, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\tfrac{(x-t)^n}{n!}\right]\,\mathrm{d}t \\ &= -f^{(n)}(t)\tfrac{(x-t)^n}{n!}\Big|_{t=a}^{x} + \tfrac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f^{(n)}(a)\tfrac{(x-a)^n}{n!} + R_n(x) \end{aligned}$$

Damit ist die Taylorsche Form des Restgliedes bewiesen. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt (dabei ist wichtig, dass $x - t$ für alle t zwischen a und x das gleiche Vorzeichen hat):

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \tfrac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x \tfrac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \quad (\text{mit } \xi \text{ zwischen } a \text{ und } x) \\ &= -f^{(n+1)}(\xi)\tfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_{t=x}^{a} \\ &= \tfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

□

Folgerung. Ist $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{I}$, so ist f ein Polynom vom Grad $\le n$ (da das Restglied der Ordnung n verschwindet). Dies kann übrigens auch direkt aus dem Hauptsatz gefolgert werden.

Die Taylorreihe

Ist f beliebig oft differenzierbar, so kann die *Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt a* angegeben werden:

$$T_{f,a} := \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

Die Reihe konvergiert (sicher, aber u.U. auch nur) für $x = a$. Konvergiert die Reihe auch für $x \neq a$? Wenn ja, für welche? Und konvergiert sie dort gegen $f(x)$?

Die letzte Frage ist (im Allgemeinen) mit Nein zu beantworten.

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad (\text{mit } a = 0)$$

$\Rightarrow$ $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 0$ für alle Ableitungen

$\Rightarrow$ $T_{f,a}^{(n)}(x) = 0$ für alle n und $T_{f,0}(x) = 0$

Man zeigt induktiv, dass jede Ableitung von f an der Stelle 0 verschwindet und für $x \neq 0$ eine Summe von Termen der Form $\frac{c}{x^k} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ ist.

Beispiele

Einige Taylorreihen kennen wir bereits:

1. Beispiel (Exponentialfunktion):

$$\begin{aligned} &\exp(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} x^k \quad (\text{Entwicklung bei } 0,\ \exp^{(k)}(0) = 1\ \forall\ k) \\ &= \exp(a)\exp(x-a) = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\exp(a)}{k!}(x-a)^k \quad (\text{Entwicklung bei } a) \end{aligned}$$

2. Beispiel (Sinus):

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (\sin^{(2k)} 0 = 0,\ \sin^{(2k+1)} 0 = (-1)^k\ \forall\ k)$$

3. Beispiel (Cosinus):

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (\cos^{(2k)} 0 = (-1)^k,\ \cos^{(2k+1)} 0 = 0\ \forall\ k)$$

Die entsprechenden Restglieder lauten:

1. Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} R_n &= \tfrac{1}{(n+1)!} \exp(\xi) x^{n+1} \quad (\text{mit } \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } x) \\ &= \tfrac{1}{(n+1)!} \exp(\xi)(x-a)^{n+1} \quad (\text{mit } \xi \text{ zwischen } a \text{ und } x) \end{aligned}$$

2. Sinus:

$$\begin{aligned} R_{2n+1}(x) = R_{2n+2}(x) &= \tfrac{1}{(2n+3)!} \sin^{(2n+3)}(\xi) x^{2n+3} \\ &= (-1)^{n+1} \tfrac{1}{(2n+3)!} \cos(\xi) x^{2n+3} \end{aligned}$$

Beobachtung. Die Taylorreihe konvergiert (offensichtlich) genau dann gegen $f(x)$, wenn $R_n(x)$ gegen 0 konvergiert.

Weitere Beispiele

Als weiteres Beispiel betrachten wir die *Logarithmusreihe* zum Entwicklungspunkt $a = 1$.

4. Beispiel (Logarithmusreihe):

$$f(x) = \ln x,\ f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)! \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

Dann gilt:

$$T_{\ln,1}(x) = 0 + (x-1) - \tfrac{(x-1)^2}{2} + \ldots - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

$$T_{\ln,1}(x+1) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \ldots + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

Tatsächlich gilt:

Satz. Für $-1 < x \leq 1$ gilt:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad (\text{bzw. } \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n)$$

Beweis. Die Restgliedabschätzung mittels des Taylorsatzes ist schwierig.

Wir gehen einen anderen Weg:

$$\ln(1+x) = \ln(1+t)\,\big|_0^x = \int_0^x \tfrac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \quad (\text{wobei } -1 < x)$$

Für $|x| < 1$ (also für $0 < 1 + x < 2$) konvergiert die geometrische Reihe:

$$\tfrac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \text{ gleichmäßig für } |t| \leq |x|$$

denn:

$$\left| \tfrac{1}{1+t} - \sum_{n=0}^{k} (-1)^n t^n \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |x|^n \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \int_0^x \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n t^n \,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty} \int_0^x \sum_{n=0}^{k} (-1)^n t^n \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_0^x (-1)^n t^n \,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \tfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \text{ für } |x| < 1
\end{aligned}$$

Was ist aber bei $x = 1$ los? Die linke Seite ist stetig bei 1, die rechte Seite ist in $[0, 1]$ gleichmäßig konvergent, denn es gilt:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} - \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| \le \frac{1}{k+1} \quad \forall\, x \in [0,1]$$

Also ist auch die rechte Seite stetig bei 1, die Gleichung gilt also auch für $x = 1$.

□

5. Beispiel (Arcus Tangens Reihe):

   Für $|x| < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

   Für $x = \pm 1$ folgt die Gleichheit wie bei der Logarithmusreihe (man beachte, dass die Reihe für 1 und -1 alterniert).

   Aus $\tan \frac{\pi}{2} = 1$ folgt $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, also:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots - \ldots \quad \text{(schlecht konvergent)}$$

6. Beispiel (Binomialreihe):

   Für $f(x) = (1+x)^\alpha$ (wobei $\alpha \in \mathbb{R}$) ist:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \ \ldots, \ f^{(k)}(x) = \binom{\alpha}{k} k!(1+x)^{\alpha-k}$$
$$\text{insbesondere: } f'(0) = \binom{\alpha}{k} k!$$

   Daraus folgt:

$$T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \textit{(Binomialreihe)}$$

   Für $\alpha \in \mathbb{N}$ ist die Reihe endlich (*Binomialformel*), Konvergenz ist also klar. Wie sieht es für andere α aus?

   Satz. Für $|x| < 1$ gilt:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

   Beweis. Die Konvergenz der Reihe ist leicht:

$$\left| \frac{y_{k+1}}{y_k} \right| = \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k} \right| = |x| \left| \frac{\alpha - k}{k+1} \right| \to |x| < 1 \text{ für } k \to \infty$$

   Schwerer ist die Restgliedabschätzung, die zeigt, dass die Reihe gegen $f(x)$ konvergiert. Das machen wir aber nicht hier.

□

7. Beispiel (Arcus Sinus Reihe):

   Für $|x| < 1$ gilt:

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \dots$$

   Beweis. Mit Hilfe der Binomialreihe gilt:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n}$$

gleichmäßig in $[-1+\delta, 1-\delta]$

   Daraus folgt:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \dots$$

vergleiche oben

□

Kapitel 18

Uneigentliche Integrale

Das (eigentliche) Riemannintegral kann nur existieren, wenn:

(a) das Integrationsintervall und

(b) die zu integrierende Funktion

beschränkt sind. Integrale wie z.B.

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int\limits_0^1 \tfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

haben jedoch (zunächst) keinen Sinn. Ober- bzw. Unterintegrale können nicht definiert werden – obwohl sich zeigen wird, dass man den Flächenstücken zwischen der x-Achse und dem Graphen durchaus einen (endlichen) Flächeninhalt zuordnen kann, indem man einen geeigneten Grenzprozess durchführt:

(a) $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} -e^{-x}\,\big|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty} \left(-e^{-b} + e^{-0}\right) = 1$

(b) $\int\limits_0^1 \tfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{a\to 0} \int\limits_a^1 \tfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to 0} 2\sqrt{x}\,\big|_a^1 = \lim\limits_{a\to 0} 2\left(1^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\right) = 2$

Allgemeiner betrachten wir die folgende Situation: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei für jedes Teilintervall $[c,d] \subset (a,b)$ integrierbar über $[c,d]$.

Definition. Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ heißt:

– *bei b uneigentlich*, wenn $b = \infty$ ist oder wenn f in der Umgebung von b unbeschränkt ist.

Entsprechend definiert man:

– *bei a uneigentlich* …

Definition. Ist z.B. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bei a eigentlich, so definiert man:

– Das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *existiert*, wenn:

$$\text{der Grenzwert } \lim_{y\to b} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x \text{ existiert}$$

Entsprechend, falls $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bei b eigentlich ist.

Definition. Ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bei a und b uneigentlich, so sagt man:

– Das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *existiert*, wenn:

$$\text{die uneigentlichen Integrale } \int \_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \text{ und } \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\text{für ein/alle } c \in (a,b) \text{ existieren}$$

Man definiert:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Bemerkung. Würde man

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{c\to a\\ d\to b}} \int\limits_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

definieren, so könnte es sein (je nachdem, wie c und d gegen a bzw. b konvergieren), dass der Grenzwert existiert, obwohl die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \text{ und } \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

nicht existieren.

Bemerkung. Die obigen Beispiele waren bei $+\infty$ bzw. 0 uneigentlich.

Beispiele

1. Beispiel:

$$\int\limits_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} \int\limits_1^y x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{divergent} & \text{für } \alpha \geq -1 \\ \frac{-1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha < -1 \end{cases}$$

2. Beispiel:

$$\int\limits_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0} \int\limits_y^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{divergent} & \text{für } \alpha \leq -1 \\ \frac{1}{1+\alpha} & \text{für } \alpha > -1 \end{cases}$$

Ein Satz zur Existenz uneigentlicher Integrale

Für diejenigen Fälle, in denen f nicht explizit integrierbar ist, ist der folgende Satz hilfreich:

Satz. Das bei b uneigentliche Integral:

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \text{ existiere}$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei über jedem abgeschlossenen Intervall $[a,c] \subset [a,b)$ (eigentlich) integrierbar und es gelte $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b)$. Dann existiert das uneigentliche Integral:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für jede Folge (b_n) aus $[a,b)$ mit $b_n \to b$ die Folge:

$$\left(\int_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

eine Cauchyfolge (also konvergent) ist. Da g uneigentlich integrierbar ist, gilt:

$$\left|\int_a^{b_n} - \int_a^{b_m} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{b_n}^{b_m} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_{b_n}^{b_m} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \to 0 \text{ für } n,m \to \infty$$

□

Weitere Beispiele

3. Beispiel:

   Die Gammafunktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch:

   $$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

   Für $\alpha < 1$ ist das Integral uneigentlich bei 0, für alle α ist es uneigentlich bei ∞. Betrachte:

   (a) $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   Wegen $0 < x^{\alpha-1}e^{-x} \leq x^{\alpha-1}$ für $0 < x \leq 1$ folgt die Existenz aus obigem Satz und Beispiel 2 ($\alpha - 1 > -1$).

   (b) $\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   Betrachte nun:

   $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{2}} = 0$ für alle α

   $\Rightarrow\ \exists\ x_\alpha > 0$ mit $x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{2}} \leq 1$ für alle $x \geq x_\alpha$

$\Rightarrow\ x^{\alpha-1}e^{-x} = \left(x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{2}}\right)e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x}{2}}$ für $x \geq x_\alpha$

$\Rightarrow$ Existenz mit Hilfe des obigen Satzes.

Satz. Es gilt:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \text{ für alle } \alpha > 0$$
$$\Gamma(n+1) = n! \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} x^\alpha e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ -x^\alpha e^{-x}\,\Big|_{\frac{1}{n}}^{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{n} \alpha x^{\alpha-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \underbrace{-n^\alpha e^{-n}}_{\to 0} + \underbrace{n^{-\alpha} e^{-\frac{1}{n}}}_{\to 0} + \alpha \underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^{n} x^{\alpha-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x}_{\to\Gamma(\alpha)} \right\} = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 = 0!$$

Induktion liefert:

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

□

Satz. Die Γ-Funktion ist stetig auf $(0,\infty)$, also eine stetige Interpolation der Fakultät.

Beweis. Ist etwas technisch.

Integralkriterium

Nun noch ein interessanter Zusammenhang mit der Konvergenz von Reihen.

Satz. Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ positiv und nichtwachsend. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ existiert}$$

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \\ F(x) := \int\limits_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right\} \text{sind nichtfallend}$$

Wegen:

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) \text{ für } k \leq t \leq k+1$$

gilt:

$$f(k+1) \leq \int\limits_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$$

Also:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int\limits_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

bzw.

$$s_n - f(1) \leq \int\limits_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = F(n) \leq s_{n-1}$$

Daraus folgt:

$$(s_n) \text{ beschränkt} \Leftrightarrow F(x) \text{ beschränkt}$$

das heißt:

$$(s_n) \text{ konvergent} \Leftrightarrow \int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ existiert}$$

□

Beispiele

4. Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \text{ konvergent} \Leftrightarrow \alpha < -1$$

denn $\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$ existiert genau dann, wenn $\alpha < 1$ ist.

5. Beispiel:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s} \text{ konvergent} \Leftrightarrow s > 1$$

Beweis.

(a) $\frac{1}{x \ln x}$ ist auf $[2, \infty)$ fallend, denn:

$$\left(\frac{1}{x \ln x}\right)' = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} < 0$$

Nun gilt:

$$\int_2^y \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x = \ln(\ln x)\,\Big|_2^y \to \infty \text{ für } y \to \infty$$

Daraus folgt:

$$\sum \frac{1}{n \ln n} \text{ ist divergent, also erst recht für } s < 1$$

(b) $\frac{1}{x(\ln x)^s}$ ist auf $[2, \infty)$ fallend, denn:

$$\left(\frac{1}{x(\ln x)^s}\right)' = -\frac{(\ln x)^s + s(\ln x)^{s-1}}{(x(\ln x)^s)^2} < 0$$

Daraus folgt:

$$\int_2^y \frac{1}{x(\ln x)^s}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{1-s}(\ln x)^{1-s}\Big|_2^y \to \frac{-1}{1-s}(\ln 2)^{1-s} \text{ für } y \to \infty.$$

□