Algebra

Blatt 1 — 14.10.2014

Aufgabe 1.

Sei K der $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$, der von $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ aufgespannt wird. Zeigen Sie, daß K ein Unterkörper ist, und finden Sie eine algebraische Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$, welche die Zahl $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ löst. Bestimmen Sie den Grad $[K : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, daß man auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V der Dimension 3 keine Multiplikation so definieren kann, daß eine Körpererweiterung V von $\mathbb{R}$ entsteht, und die Multiplikation mit Elementen von $\mathbb{R}$ der Skalarmultiplikation von V entspricht.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, daß jedes Element $\alpha \in V$ Nullstelle eines Polynoms $f \in \mathbb{R}[T]$ ist. Wählen Sie dabei f minimal. Nutzen Sie aus, daß nach dem Zwischenwertsatz der Analysis jedes reelle Polynom vom Grad 3 eine Nullstelle besitzt, und Nullstellen zu Linearfaktoren des Polynoms gehören.

Aufgabe 3.

Zeigen Sie, daß jedes $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ein Quadrat ist, indem Sie den Ansatz $w = x + yi$ und $w^2 = z$ nach x und y auflösen.

Aufgabe 4.

Sei K ein Körper und $f \in K[T]$ ein Polynom vom Grad d. Zeigen Sie:

(a) Wenn $d = 2$ oder $d = 3$ ist, dann ist f irreduzibel in $K[T]$ genau dann, wenn f keine Nullstelle in K hat.

(b) Zeigen Sie, daß $T^4 + 4$ nicht irreduzibel ist.

Abgabe: Ausnahmsweise am Dienstag in 2 Wochen, den 28.10.2014, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter
`http://www.uni-frankfurt.de/52065465/Algebra-WS2014_15`