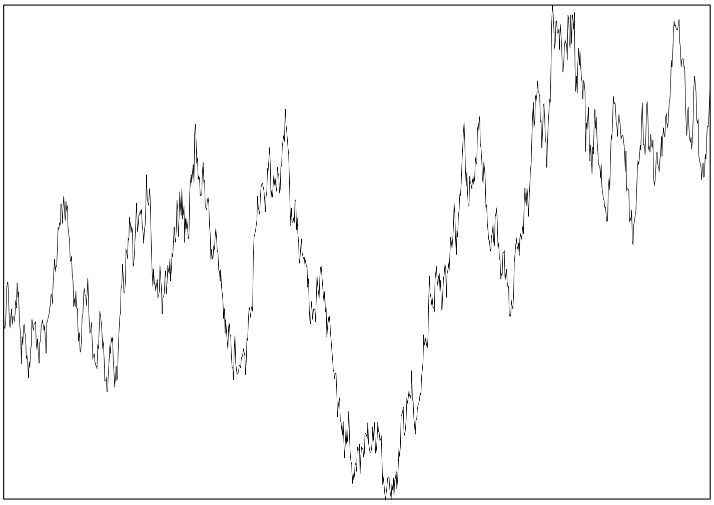
Prof. Dr. Thomas Gerstner
Marco Noll

Programmierpraktikum Computational Finance

Blatt 1



1 Einführung

Finanzderivate sind Wertpapiere, deren Wert vom Preis eines oder mehrerer anderer Wertpapiere, z.B. von Aktien, abhängt. Finanzderivate werden in ähnlicher Weise wie die zugrundeliegenden Wertpapiere an speziellen Terminbörsen gehandelt. Sie werden von Anlegern zum einen aufgrund ihrer Hebelwirkung spekulativ gekauft und zum anderen zur Absicherung (Hedging) von bereits eingegangenen Positionen gegenüber zukünftigen Entwicklungen eingesetzt.

Ziel dieses Praktikums ist die Bestimmung eines fairen Werts für solche Finanzderivate unter bestimmten Modellannahmen. Dieser faire Wert muß nicht gleich dem Börsenwert des Derivats sein, welcher aus Angebot und Nachfrage der subjektiven Wertvorstellungen von Käufern und Verkäufern entsteht. Nichtdestotrotz bietet er ein wichtiges Hilfsmittel für alle Marktteilnehmer und hat erst den systematischen Handel mit Finanzderivaten seit der Einführung des Derivatehandels 1973 am Chicago Board of Trade (CBOT) ermöglicht.

Bei der Bewertung von Finanzderivaten spielen numerische Verfahren, also Näherungsverfahren, eine entscheidende Rolle, da in fast allen Fällen eine geschlossene Formel für einen fairen Wert solcher Verträge nicht angegeben werden kann. In diesem Praktikum werden wir verschiedenste Verfahren kennenlernen, die für unterschiedliche Arten von Finanzderivaten und Modellannahmen entwickelt worden sind. Diese Verfahren sollen praktisch in einer gängigen Programmiersprache implementiert werden und zur Berechnung einiger konkreter Beispielanwendungen eingesetzt werden. Hierbei liegt der Schwerpunkt nicht bei der theoretischen Herleitung der Bewertungsverfahren sondern an deren Umsetzung auf dem Computer. Auf den Aufgabenblättern werden nur die zentralen Formeln angegeben und die wichtigsten Herleitungen skizziert. Für die theoretischen Grundlagen und für ausführliche Beweise wird auf die jeweilige Literatur am Ende der Blätter verwiesen.

In diesem ersten Blatt wollen wir uns einfachen Verfahren zur Bewertung von Optionen widmen. Hierbei werden wir die Black–Scholes Formel, einen Approximationsalgorithmus zur Berechnung der kumulativen Normalverteilung, Verfahren zur Bestimmung der historischen und impliziten Volatilität von Wertpapieren und die Binomialmethode kennenlernen.

2 Optionen

Eine Option ist das Recht, aber nicht die Pflicht, eine bestimmte Menge (Bezugsverhältnis) an zugrundeliegenden Wertpapieren (dem Basiswert) zu einem vorgegebenen Preis (den Ausübungspreis) innerhalb eines Ausübungszeitraums zu kaufen (bei Call Optionen) oder zu verkaufen (bei Put Optionen). Optionen werden für verschiedenste Basiswerte angeboten, typischerweise Aktien, aber auch für Aktienindizes, Währungen, Anleihen oder Güter, wie Gold oder Öl, und sogar andere Optionen. Optionen wie auch weitere verwandte Finanzinstrumente (z.B. Futures, Forwards oder Swaps) werden, nachdem ihr Wert vom Preis des Basiswerts abängt, Derivate genannt.
Optionen werden typischerweise von einer Bank ausgegeben, die die Bedingungen (das Bezugsverhältnis, den Ausübungspreis und -zeitraum) festlegt. Ein Käufer kann innerhalb des Ausübungszeitraums die Option entweder ausüben und damit die Wertpapiere zum Ausübungspreis beziehen, die Option wieder verkaufen oder, am Ende der Ausübungszeit, die Option wertlos verfallen lassen. Der Käufer der Option zahlt für dieses Ausübungsrecht einen (Markt-)Preis, der durch Angebot und Nachfrage bestimmt wird.
Bei sogenannten Europäischen Optionen besteht der Ausübungszeitraum aus nur einem einzigen Zeitpunkt in der Zukunft, dem Verfallsdatum T. Im Gegensatz dazu können sogenannte Amerikanische Optionen auch vor dem Verfallsdatum ausgeübt werden. Die Namen haben jedoch keine geographische Bedeutung. Die meisten Aktienoptionen, die gehandelt werden, sind vom Amerikanischen Typ.
Sei nun V der Wert der Option auf einen Basiswert. Dieser Wert hängt von dem Preis des Basiswerts $S(t)$, welcher mit der Zeit variiert, und vom momentanen Zeitpunkt $t \leq T$ ab, was als $V(S,t)$ geschrieben wird. Sei nun K der Ausübungspreis, dann ist zum Verfallsdatum der Wert einer Call Option gegeben als

$$V(S,T) = \max\{S(T) - K, 0\} = (S(T) - K)^{+}. \tag{1}$$

Wenn der Preis des Basiswerts zum Ausübungszeitpunkt $S(T)$ größer als K ist, dann kann der Halter der Option das Wertpapier sofort verkaufen und einen Gewinn $S(T) - K$ realisieren (für den Fall, daß keine Transaktionskosten anfallen). Falls der Preis niedriger ist, wird der Halter die Option wertlos verfallen lassen. Der Wert einer Put Option zum Verfallsdatum ist entsprechend umgekehrt

$$V(S,T) = (K - S(T))^{+}. \tag{2}$$

Die Funktionen $V(S,T)$ werden dementsprechend Auszahlungsfunktionen genannt. Der Wert der Option ist zum Verfallsdatum unabhängig vom Typ der Option und damit für Europäische und Amerikanische Optionen gleich.
Die Frage ist nun: was ist ein fairer Preis für die Option für Zeitpunkte $t < T$ und vor allem zum momentanen Zeitpunkt $t = 0$? Der Optionpreis hängt vor allem von der erwarteten zukünftigen Entwicklung des Basiswerts ab. Diese Entwicklung wird durch ein geeignetes (stochastisches) Modell angenommen. Unter diesen Modellannahmen und geeigneten Marktannahmen kann dann eine Formel für den fairen Preis mathematisch abgeleitet werden. Der Preis ist dann entweder ein Erwartungswert oder die Lösung einer partiellen Differentialgleichung. Der Zusammenhang zwischen den beiden Preisen liefert die Feynman–Kac Formel. In beiden Fällen kann der Preis des Derivats nach geeigneter Diskretisierung (in Raum und Zeit) und Lösung ermittelt werden. Im ersten Fall ist ein Integrationsproblem zu berechnen, im zweiten Fall ein großes lineares Gleichungssystem zu lösen (siehe Abbildung 1). Für eine schnelle und genaue Berechnung des Optionspreises müssen zur Diskretisierung und Lösung jedoch geeignete numerische Verfahren eingesetzt werden.

3 Modellierung

Im folgenden wollen wir nun ein konkretes und oft verwendetes Modell der zukünftigen Entwicklung von Wertpapierpreisen betrachten, das sogenannte Black–Scholes Modell. Weiterhin werden wir zwei Verfahren zur Bestimmung des wichtigesten Parameters in diesem Modell, der Volatilität, kennenlernen. Zunächst müssen wir jedoch einige Eigenschaften des Markts festhalten.

3.1 Marktannahmen

Es werden folgende Annahmen über den Markt gemacht:

- Es gibt keine Transaktionskosten oder Steuern.
- Die Zinsraten zum Leihen und Verleihen sind für beide Parteien gleich und konstant.

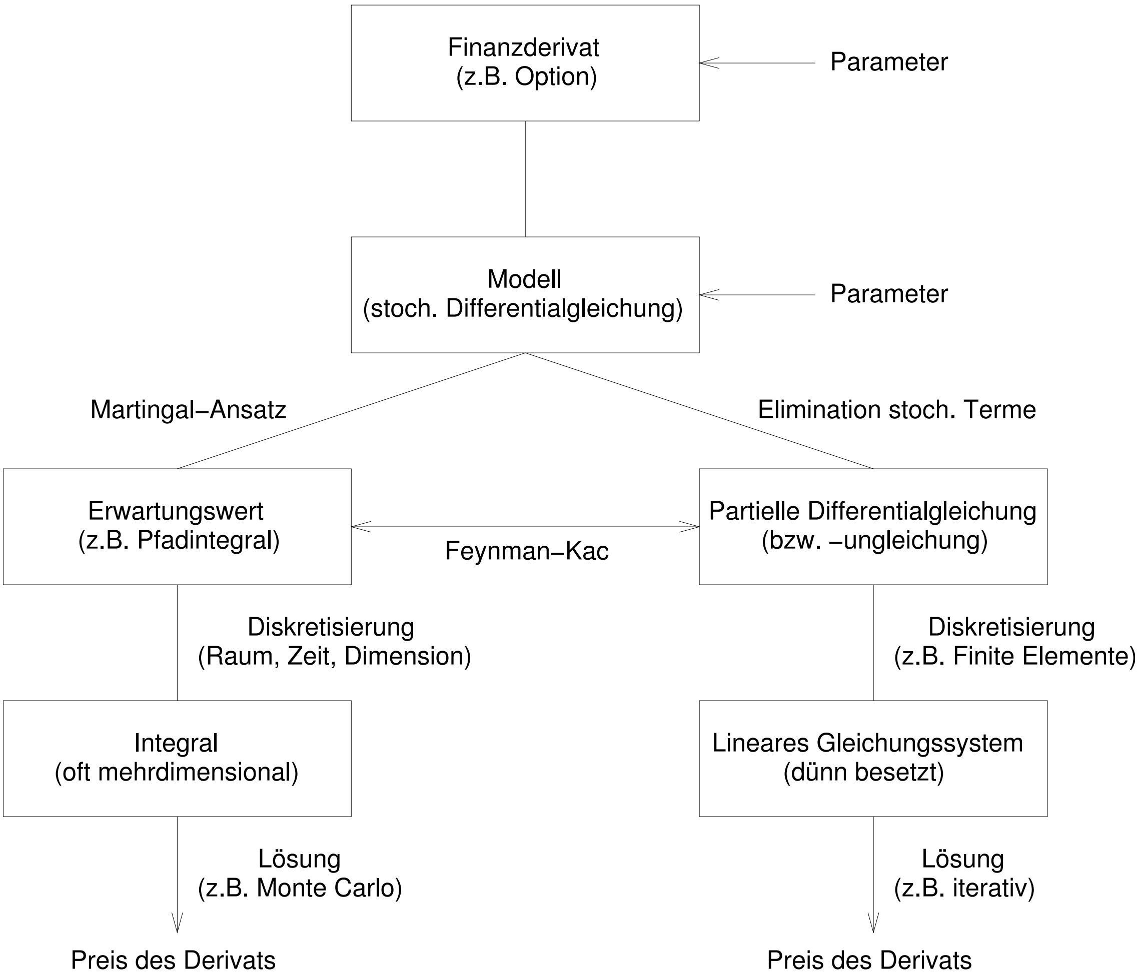


Abbildung 1: Übersicht und Aufbau der verschiedenen Verfahren zur Bewertung von Finanzderivaten.

- Alle Parteien haben Zugang zu allen Informationen.
- Wertpapiere und Kredite sind zu jeder Zeit in beliebiger Menge verfügbar. Leerverkäufe sind erlaubt.
- Der individuelle Handel beeinflußt den Preis nicht.
- Es gibt keine Arbitragemöglichkeiten (d.h. keinen risikofreien Gewinn).

Die ersten paar Annahmen dienen nur zur Vereinfachung und können später aufgehoben bzw. geeignet modelliert werden. Insbesondere aber die letzte Annahme der Arbitragefreiheit ist von zentraler Bedeutung zur fairen Bewertung von Finanzderivaten.

3.2 Black–Scholes Modell

Eines der grundlegensten stochastischen Modell für Aktien wurde von Bachelier um 1900 entwickelt und wird heute auch für andere Wertpapiere verwendet. Es bildet die Grundlage der Pionierarbeiten von Black, Scholes und Merton 1973 zur Optionspreisbewertung. Hierbei wird der Basiswert mittels sogenannter geometrischer Brownscher Bewegung modelliert und folgt folgender linearer stochastischer Differentialgleichung

$$dS(t) = \mu S(t)\ dt + \sigma S(t)\ dW(t), \tag{3}$$

wobei μ die konstante Drift, σ konstante Volatilität und $W(t)$ ein eindimensionaler Wiener Prozeß (Standard Brownsche Bewegung) ist. Ein Wiener Prozeß ist ein Markov Prozeß mit den Eigenschaften $W(0) = 0$ und $W(t) \sim N(0,t)$ für $t \geq 0$, wobei $N(0,t)$ die Gauß'sche Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz t ist. Obige Notation ist nur eine Kurzschreibweise für die Itô–Integralgleichung

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \mu S(u)\ du + \int_0^t \sigma S(u)\ dW(u), \tag{4}$$

wobei der zweite Integralterm ein stochastisches Integral darstellt. Für diese Integralgleichung existiert eine geschlossene Lösung als

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}, \tag{5}$$

wie mit Hilfe des Itô–Lemmas nachgewiesen werden kann. Zur Optionspreisbewertung muß nun der stochastische Prozeß aufgrund des Arbitrage–Prinzips in risikoneutrale Form gebracht werden. Hierbei wird lediglich die Drift μ durch die risikofreie Zinsrate r ersetzt, d.h.

$$S(t) = S(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}. \tag{6}$$

Nimmt man den Logarithmus auf beiden Seiten und teilt durch $S(0)$ dann sieht man, daß

$$\ln(S(t)/S(0)) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t) \tag{7}$$

gilt. Der logarithmische Wertzuwachs $\ln(S(t)/S(0))$ ist also normalverteilt mit Mittelwert $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ und Varianz σt und damit $S(t)$ lognormalverteilt. Wegen $E(e^{\sigma W(t)}) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}$ gilt daher für den Erwartungswert und die Varianz von S zum Zeitpunkt t

$$E(S(t)) = S(0) \cdot e^{rt} \tag{8}$$

und

$$Var(S(t)) = E(S^2(t)) - (E(S(t)))^2 = S^2(0)e^{(2r+\sigma^2)t} - (S(0) \cdot e^{rt})^2 = S^2(0)e^{2rt}(e^{\sigma^2 t} - 1). \tag{9}$$

4 Black–Scholes Formel

Unter diesen Modellannahmen kann für Europäische Optionen eine exakte Formel für den Optionspreis hergeleitet werden, die Black–Scholes Formel. Es gibt eine Menge von Ansätzen zur Herleitung dieser Formel, zwei davon werden wir in Blatt 2 und 4 kennenlernen.

4.1 Black–Scholes Formel

An dieser Stelle wollen wir nur die Black–Scholes Formel angeben. Sie lautet für Europäische Call bzw. Put Optionen:

$$V_{Call}(S,0) = S(0)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{10}$$

bzw.

$$V_{Put}(S,0) = Ke^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1) \tag{11}$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln(S(0)/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{12}$$

und

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{13}$$

wobei $N(x)$ die kumulative Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz 1

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy \tag{14}$$

darstellt. Aufgrund ihrer Einfachheit ist die Black–Scholes Formel für den Optionsscheinhandel von großer praktischer Bedeutung.

4.2 Kumulative Normalverteilung

Zur Auswertung der Black–Scholes Formel ist die Berechnung der kumulativen Normalverteilung notwendig. Hierfür gibt es schnelle Approximationsverfahren, die auf stückweise polynomialer Interpolation basieren. Ein in der Praxis bewährtes Verfahren ist das Moro–Verfahren, welches den Definitionsbereich in drei Streifen $[0, 1.87]$, $[1.87, 6]$ und $[6, \infty]$ unterteilt. Für $x < 0$ berechnet man einfach $1 - N(-x)$. Das Moro–Verfahren kann die kumulative Normalverteilung mit einer Genauigkeit von 8 Stellen berechnen. Es lautet für positive Eingabeparameter x wie folgt:

$A0 = 0.398942270991$ $A1 = 0.020133760596$ $A2 = 0.002946756074$
$B1 = 0.217134277847$ $B2 = 0.018576112465$ $B3 = 0.000643163695$
$C0 = 1.398247031184$ $C1 = -0.360040248231$ $C2 = 0.022719786588$
$D0 = 1.460954518699$ $D1 = -0.305459640162$ $D2 = 0.038611796258$
$D3 = -0.003787400686$
falls $x \leq 1.87$
  $x2 = x * x$
  $N = 0.5 + x * (A0 + (A1 + A2 * x2) * x2)/(1.0 + (B1 + (B2 + B3 * x2) * x2) * x2)$
falls $x < 6$
  $N = 1.0 - ((C0 + (C1 + C2 * x) * x)/(D0 + (D1 + (D2 + D3 * x) * x) * x))^{16}$
sonst $N = 1.0$

Algorithmus 1: Berechnung der kumulativen Normalverteilung mit dem Moro–Verfahren.

5 Volatilität

Im Black–Scholes Modell treten zwei noch zu bestimmende Parameter auf, die Drift μ und die Volatilität σ. Wie wir bereits gesehen haben, spielt die Drift in risikoneutraler Form bei der Optionspreisbewertung keine Rolle, die Volatilität dafür eine umso größere. Wir wollen nun zwei Verfahren zur Bestimmung der Volatilität angeben.

5.1 Historische Volatilität

Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Volatilität besteht in der Betrachtung von vergangenen Kursen des Basiswerts. Diese historische Volatilität entspricht der Varianz der Kurswerte zu verschiedenen vergangenen Zeitpunkten. Seien t_k, $0 \leq k \leq M$, $M+1$ verschiedene Zeitpunkte und $S(t_k)$ der Kurs des Basiswerts zu diesen Zeitpunkten. Nachdem die Kurse lognormalverteilt sind, kann die historische Volatilität berechnet werden als

$$\sigma^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(\ln(S(t_i)/S(t_{i-1})) - \bar{S})^2 \quad \text{wobei} \quad \bar{S} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\ln(S(t_i)/S(t_{i-1})). \tag{15}$$

Die Auswertung dieser Formel erfordert zwei Schleifen. Eine numerisch stabile Auswertung mit einer Schleife kann jedoch mit folgendem Algorithmus erfolgen:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = \ln(S(t_1)/S(t_0)) \\ \beta = 0 \\ \mathit{for}\ \ i = 2,\ldots,M \\ \quad \gamma = \ln(S(t_i)/S(t_{i-1})) - \alpha \\ \quad \alpha = \alpha + \gamma/i \\ \quad \beta = \beta + \gamma^2(i-1)/i \\ \sigma = \sqrt{\beta/(M-1)} \end{array}}$$

Algorithmus 2: Berechnung der historischen Volatilität.

Ein weiterer Vorteil dieses Algorithmus ist, daß Marktdaten (z.B. Tickdaten) online ohne Zwischenspeicherung verarbeitet werden können.

5.2 Implizierte Volatilität

Alternativ läßt sich die Volatilität aus den Marktpreis anderer Optionen auf den Basiswert berechnen. Dieses Verfahren wird oft verwandt, nachdem zur Berechnung des Optionspreises nach der Black–Scholes Formel an sich die zukünftige und nicht die vergangene Volatilität benötigt wird. Die durch den Markt implizierte Volatilität ist damit für den Handel fast wichtiger als der Optionspreis selbst. Aufgrund der Nichtlinearität der Black–Scholes Formel kann jedoch keine analytische Formel für die implizierte Volatilität angegeben werden, sondern muß mit Hilfe eines iterativen Nullstellenverfahrens berechnet werden. Nachdem die Ableitung des Optionspreises nach der Volatilität (Vega) durch Ableiten der Black–Scholes Formel als

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = S(0)\sqrt{T}N'(d_1) \tag{16}$$

mit der Ableitung

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

angegeben werden kann, wollen wir hier das Newton–Raphson Verfahren zur Nullstellensuche

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i - \frac{V(\sigma_i) - V}{\frac{\partial V}{\partial \sigma}(\sigma_i)} \tag{17}$$

einsetzen. Hierbei ist $V(\sigma_i)$ der Optionspreis nach der Black–Scholes Formel für die momentane Iterierte σ_i und V der Marktpreis der Option. Als Startwert σ_0 wollen wir den Näherungswert $\sqrt{\left|\log\left(\frac{S0}{K}\right) + rT\right| \frac{2}{T}}$ wählen. Damit läßt sich das Newton–Raphson Verfahren zur Berechnung der implizierten Volatilität angeben als

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
\sigma = \sqrt{\left|\log\left(\frac{S0}{K}\right) + rT\right| \frac{2}{T}} \\
\textit{for } \ it = 1, \ldots, MAXIT \\
\quad P = V(\sigma_i) \\
\quad \textit{falls } (|P - V| < TOL) \textit{ breche ab} \\
\quad \sigma = \sigma - (P - V)/(S(0)\sqrt{T}N'(d_1)) \\
\hline
\end{array}
$$

Algorithmus 3: Berechnung der implizierten Volatilität.

Wird nicht die Black–Scholes Gleichung, sondern ein anderes Bewertungsverfahren (wie die nun folgende Binomialmethode oder die Verfahren auf den nächsten Aufgabenblättern) verwendet, ist die Ableitung des Optionspreises nach der Volatilität nicht so einfach berechenbar. Hier können dann entweder Approximationen der Ableitung durch Differenzenquotienten oder ableitungsfreie Nullstellenverfahren, wie die Bisektionsmethode eingesetzt werden.

6 Baumverfahren

Wir wollen nun eine einfache Zeitdiskretisierung für den zukünftigen Verlauf von Wertpapieren nach dem Black–Scholes Modell betrachten. Dieses Verfahren wurde 1979 von Cox, Ross und Rubinstein entwickelt und wird demnach CRR Modell genannt. Aufgrund der einfachen Implementierung und der hohen Flexibilität ist es in der Praxis stark verbreitet. Unter den Modellannahmen aus Abschnitt 3.1 kann im CRR Modell ein fairer Preis sowohl für Europäische als auch für Amerikanische Optionen ermittelt werden. Es gilt sogar unter gewissen Bedingungen, daß der Optionspreis des diskreten CRR Modells gegen den des Black–Scholes Modells konvergiert, wenn die Zeitschrittweite gegen Null geht.

6.1 CRR Modell

Wir wollen nun das Zeitintervall $[0, T]$ in $M + 1$ Zeitschritte t_i unterteilen

$$t_i = i\Delta t \quad \text{für} \quad i = 0, \ldots, M, \tag{18}$$

wobei $\Delta t = T/M$. Zwischen zwei Zeitschritten soll sich der Preis des Wertpapiers entweder um einen Faktor u nach oben oder einen Faktor d nach unten bewegen können ($0 < d < u$). Dabei sei die Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung gleich p und für eine Abwertsbewegung gleich $1 - p$. Seien nun $\xi_i \in \{u, d\}, 1 \leq i \leq M$ diese Zufallsfaktoren, dann gilt für den Preis des Wertpapiers

$$S(t_i) = S(0) \prod_{j=1}^{i} \xi_i. \tag{19}$$

Dieser Prozeß wird auch Binomialprozeß genannt und das zeitdiskrete Modell demnach Binomialmodell. Für eine geeignete Wahl von u, d und p erhält man für $\Delta t \to 0$ Konvergenz des Binomialprozeß gegen den Wiener Prozess. Somit kann das Binomialmodell als Diskretisierung des kontinuierlichen Modells verstanden werden. Die freien Parameter u, d und p reflektieren dabei keine individuelle Markterwartung, sondern werden durch drei Gleichungen so gewählt, daß eine risikoneutrale Bewertung erfolgt. Die erste Gleichung hierfür ist

$$u \cdot d = 1. \tag{20}$$

Dadurch gilt $S \cdot ud = S \cdot du$ und damit eine Pfadunabhängigkeit. Weiterhin wird dadurch das Anwachsen der verschiedenen Ausgänge limitiert, da nach M Zeitschritten $S(t_M)$ nur $M + 1$ verschiedene (in Kontrast zu 2^M Werten, wenn $u \cdot d \neq 1$) annehmen kann (siehe Abbildung 2).

Die beiden übrigen Gleichungen zur Fixierung von u, d und p entstehen dadurch, daß die Erwartungswerte und Varianzen des diskreten und kontinuierlichen Modells gleichgesetzt werden. Im diskreten Modell ist der Erwartungswert des Preises S zum Zeitpunkt t_{i+1} gegeben als

$$E(S(t_{i+1})) = pS(t_i)u + (1 - p)S(t_i)d, \tag{21}$$

und die Varianz als

$$Var(S(t_{i+1})) = p(S(t_i)u)^2 + (1 - p)(S(t_i)d)^2 - S^2(t_i)(pu + (1 - p)d)^2. \tag{22}$$

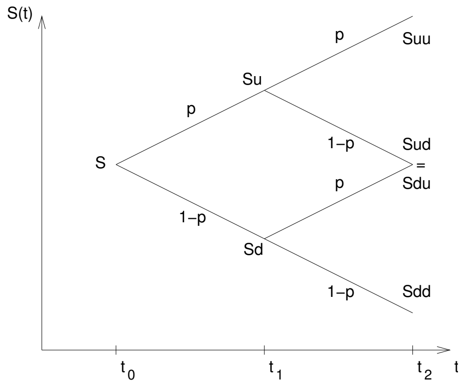


Abbildung 2: Die ersten beiden Schritte des Binomialbaums.

Im kontinuierlichen Modell gilt nach (8) und (9)

$$E(S(t_{i+1})) = S(t_i) \cdot e^{r\Delta t} \tag{23}$$

und

$$Var(S(t_{i+1})) = S^2(t_i)e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - S(t_i) \cdot e^{r\Delta t} = S^2(t_i)e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1). \tag{24}$$

Nach der Lösung des (nichtlinearen) Gleichungssystems ergeben sich die drei Parameter u, d und p als Funktionen von σ, r und Δt über:

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \tag{25}$$

$$d = 1/u = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \tag{26}$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \tag{27}$$

wobei $\beta = \frac{1}{2}(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t})$.

6.2 Binomialmethode

Die eigentliche Binomialmethode besteht nun aus zwei Phasen, der Vorwärts- und der Rückwärtsphase. In der Vorwärtsphase werden die zukünftigen Wertpapierkurse initialisiert. Hierzu stellt man sich die verschiedenen Ausgänge als zweidimensionales Feld S_{ji} vor, wobei $S_{00} = S(t_0)$ der Startwert ist und setzt

$$S_{ji} = S(t_0)u^j d^{i-j} \tag{28}$$

für $1 \le i \le M$ und $0 \le j \le i$. Damit ist S_{ji} der $j-$te mögliche Ausgang zum Zeitpunkt t_i. Für Europäische Optionen reicht es hierbei aus, S_{ji} nur für $i = M$ und $j = 0, \ldots, i$ statt für alle i und j zu berechnen. Bei Amerikanischen Optionen muß aufgrund des vorzeitigen Ausübungsrechts jedoch das ganze Feld berechnet werden.
In der Rückwärtsphase werden nun die Optionspreise berechnet und in einem entsprechenden Feld V_{ji} abgelegt. Zum Zeitpunkt $T = t_M$ ist der Wert der Option V aufgrund der Payoff–Funktion bekannt und es gilt damit

$$V_{jM} = (S_{jM} - K)^+ \tag{29}$$

für Call Optionen und entsprechend $V_{jM} = (K - S_{jM})^+$ für Put Optionen. Nun werden rückwärts die Werte V_{ji} jeweils für t_i aus t_{i+1} im Falle von Europäischen Optionen berechnet als

$$V_{ji} = e^{-r\Delta t} \cdot (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}). \tag{30}$$

Bei Amerikanischen Optionen muß noch überprüft werden ob vorzeitige Ausübung erfolgt und es gilt für Call Optionen

$$V_{ji} = \max\{(S_{ji} - K)^+, e^{-r\Delta t} \cdot (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1})\}. \tag{31}$$

und für Put Optionen die entsprechende Formel mit $(K - S_{ji})^+$. Damit ist $V(S,0) = V_{00}$ der berechnete Optionspreis zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Zusammengefaßt sieht die Binomialmethode für Europäische und Amerikanische Optionen wie folgt aus:

```
Berechne u, d, p aus (25)–(27)
S_00 = S(0)
for  i = 1, ..., M
   for  j = 0, ..., i
      Setze S_ji = S_00 u^j d^(i-j)
for  j = 0, ..., M
   Berechne V_jM aus (29)
for  i = M - 1, ..., 0
   for  j = 0, ..., i
   Berechne V_ji aus (30) bzw. (31)
V = V_00
```

Algorithmus 4: Die Binomialmethode.

7 Implementierung

Schreiben Sie die folgenden Programme in Matlab/Scilab.

- `KUMNOR(x)`: Die Berechnung der kumulativen Normalverteilung $N(x)$ nach dem Moro Verfahren (Algorithmus 1).
- `BLACKSCHOLES(S0, K, T, sigma, r)`: Die Black–Scholes Formel (10–13) unter Verwendung von `KUMNOR` für Europäische Call Optionen.
- `HISTVOLA(M, S[])`: Die Berechnung der historischen Volatilität aus $M+1$ Kursen $S(t_i)$, $0 \leq i \leq M$ (Algorithmus 2).
- `IMPLVOLA(S0, K, T, r, V, TOL, MAXIT)`: Die Berechnung der implizierten Volatilität über die Black–Scholes Formel für den Marktpreis V (Algorithmus 3).
- `BINOM(M, S0, K, T, sigma, r, Eur)`: Die Binomialmethode für eine Europäische (Eur=1) bzw Amerikanische (Eur=0) Call Option mit M Zeitschritten (Algorithmus 4).

Überprüfen Sie die Korrektheit Ihrer Programme anhand einiger selbstgewählter Beispiele, bei denen die Lösung (z.B. analytisch oder aus der Literatur) bekannt ist.

8 Beispiele

Alle Aufgabenlösungen müssen schriftlich in elektronischer Form (als PDF Datei) abgegeben werden. Das bedeutet, daß Sie mit einem Textverarbeitungsprogramm (z.B. MS Word oder LaTeX) zu jeder Aufgabe Ihre Erläuterungen (z.B. verwendete Parameter, Vergleichswerte, etc.) angeben und die erzeugten Plots in das Dokument etwa im Stil dieses Aufgabenblatts einbetten. Sie können die Lösung per e–mail einschicken (`noll@math.uni-frankfurt.de`) oder in Raum 109b vorbeibringen.
Führen Sie mit den Programmen folgende Beispielrechnungen durch. Achten Sie dabei auf das Bezugsverhältnis. Als risikolose Zinsrate verwenden Sie stets $r = 0.005$.

(a) Berechnen Sie die historische Volatilität des DAX-Index, indem Sie die monatlichen Schlusskurse seit Januar 2012 betrachten. Sie finden die Aktienkurse im Internet auf der Vorlesungsseite

`http://www.uni-frankfurt.de/52334212/CFPrak-WS14`

Plotten Sie den Kursverlauf und geben Sie ihr berechnetes σ an.

(b) Berechnen Sie die implizierte Volatilität für ein paar europäische Optionen unterschiedlicher Laufzeit bei gleichen Ausübungspreisen. Suchen Sie hierzu auf der Internetseite

`http://www.onvista.de/hebelprodukte/`

geeignete Optionsscheine aus. Plotten Sie die berechneten implizierten Volatilitäten in Äbhängigkeit von der Laufzeit in ein Diagramm.

(c) Berechnen Sie mit der Binomialmethode den Preis einer Europäischen Call Option auf den DAX bei Fälligkeit $T = 1$ (Jahr), Ausübungspreis 8650 Euro und Volatilität $\sigma = 0.2$ für einen Kurs von 8650 Euro. Verwenden Sie $M = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$ und 128.

(d) Vergleichen Sie obige Ergebnisse mit dem Preis der Black–Scholes Formel. Plotten Sie die Preisdifferenz gegen den Aufwand (M^2) und ermitteln Sie die Konvergenzrate der Binomialmethode.

(e) Berechnen Sie mit der Binomialmethode ($M = 32$) den Preis einer Europäischen und einer Amerikanischen Call Option auf den DAX für Fälligkeiten $T = 0.05 \cdot i$, $1 \leq i \leq 20$ (also bis zu einem Jahr) und für Ausübungspreise ($K = 8000 + j * 100$) Euro, $j = 1 \leq j \leq 20$. Plotten Sie die Preise als Fläche $(K, T, V(S, T))$ in einem dreidimensionalen Plot.

(f) Vergleichen Sie die berechneten Optionspreise mit Marktpreisen. Wählen sie hierzu 3 Optionsscheine mit geeigneten Laufzeiten und Ausübungspreisen aus.

Literatur

[1] R. Seydel, Einführung in die numerische Berechnung von Finanz–Derivaten, Springer, 2000.

[2] R. Seydel, Tools for Computational Finance, Springer, 2002.

[3] J. Hull, Optionen, Futures und andere Derivate, Oldenbourg, 2001.

[4] Y.-K. Kwok, Mathematical Models of Financial Derivatives, Springer, 1998.

[5] M. Musiela, M. Rutkowski, Martingale Methods in Financial Modelling, Springer, 1997.

[6] P. Wilmott, S. Howison, H. Dewynne, The Mathematics of Financial Derivatives, Cambridge University Press, 1995.