Übung 5

Abgabe bis Freitag, 21.11.

Aufgabe 18: [Äquivalenzrelationen]

Untersuchen sie, ob für $x, y \in X$ die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen sind:

(a) $X = \mathbb{R}; \quad x \sim y \ :\Longleftrightarrow x \leq y;$

(b) $X = \mathbb{R}; \quad x \sim y \ :\Longleftrightarrow x \neq y;$

(c) $X = \mathbb{R}^n; \quad (x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n) \ :\Longleftrightarrow (x_1^2, \ldots, x_n^2) = (y_1^2, \ldots, y_n^2);$

(d) $X = \mathbb{Z}; \quad x \sim y \ :\Longleftrightarrow (x - y)$ ist durch $m \in \mathbb{N}$ teilbar (d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass $(x - y) = m \cdot n$).

Punkte: $\boxed{2/2/2/2}$

Aufgabe 19: [Halbordnung]

Sei A ein (endliches) Alphabet, sei $A^* := \{()\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ die Menge der Wörter (beliebiger Länge) über dem Alphabet A.
Für zwei Worte $u = (u_1, \ldots, u_k) \in A^k$,$v = (v_1, \ldots, v_l) \in A^l$ setzen wir:

$$u \circ v := (u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l) \in A^{k+l}.$$

Wir definieren für $u, v \in A^*$:

$$u \leq v :\Longleftrightarrow \text{ Es gibt ein } z \in A^* \text{ mit } u \circ z = v.$$

(a) Zeigen sie: $\leq$ ist reflexiv und transitiv in A^*.

(b) Gibt es in A^* ein Wort w, so dass gilt

$$w \leq u \text{ für alle } u \in A^*.$$

Punkte: $\boxed{4/2}$

Aufgabe 20: [Bild und Urbild]

Sei $f : X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$ und $B_1, B_2 \subset Y$. Zeigen sie:

(a) $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$

(b) $B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

Punkte: $\boxed{3/3}$

Aufgabe 21: [Abbildungen]

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen sie:

(a) Sind f und g beide injektiv, so ist auch die Komposition $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f und g beide surjektiv, so ist auch die Komposition $g \circ f$ surjektiv.

(c) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist g surjektiv und f injektiv.

Punkte: $\boxed{2/2/3}$

bitte wenden

Aufgabe 22: [Sage]

Das n-te Folgenglied f_n der Fibonacci Folge $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ definiert sich als Summe der beiden Vorgänger, wobei gilt $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$.

(a) Definieren sie eine Sage Funktion $fibo(n)$, die mit Hilfe einer for-Schleife das n-te Folgenglied der Fibonacci Folge zurückgibt. Testen sie ihre Funktion mit $fibo(25)$.

(b) Definieren sie eine **rekursive** Sage Funktion $fiboRek(n)$, die das n-te Folgenglied der Fibonacci Folge zurückgibt. Testen sie ihre Funktion mit $fiboRek(50)$.

(c) Definieren sie eine Sage Funktion $fiboSum(y)$, welche zum einen die größte ganze Zahl n zurückgibt, für die gilt $\sum_{i=1}^{n} fibo(i) < y$ sowie die zugehörige Summe $S = \sum_{i=1}^{n} fibo(i)$. Testen sie ihre Funktion mit $fiboSum(10000)$.

(d) Plotten sie die Punktepaare $(i, fibo(i))$ für $i = 0, 1, \ldots, 50$ und verbinden sie benachbarte Punkte mit einer Geraden.

Punkte: $\boxed{2/2/2/2}$

Gesamtpunktzahl: 35 Punkte