

Algebra**Blatt 5 — 18.10.2014****Aufgabe 17.** (Artin-Schreier Erweiterungen in Charakteristik p)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie:

- (a) Die Abbildung

$$\wp = \text{Frob} - \text{id} : K \rightarrow K,$$

definiert durch $\wp(x) = x^p - x$, ist ein Gruppenhomomorphismus der additiven Gruppe.

- (b) $\wp(x) = \wp(x + 1)$.

- (c) $a \notin \wp(K) \iff T^p - T - a \in K[T]$ ist irreduzibel.

- (d) Sei nun $a \notin \wp(K)$ und $K(\alpha)/K$ die Adjunktion einer Nullstelle α von $T^p - T - a$. Zeigen Sie, daß $K(\alpha)$ der Zerfällungskörper von $T^p - T - a$ ist.

- (e) Bestimmen Sie $\text{Aut}_K(K(\alpha))$ und bestimmen Sie den Fixkörper von $K(\alpha)$ unter $\text{Aut}_K(K(\alpha))$.

Aufgabe 18.

Sei K ein Körper und $L = K(X)$ der rationale Funktionenkörper in der Variablen X .

- (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M = K(X^n)$ als Teilkörper von L . Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $X \in L$ über M und auch den Grad $[L : M]$.

- (b) Sei $f \in L$ ein nicht-konstantes Element, also $f \notin K$, und sei $M = K(f)$.

Zeigen Sie, daß f transzendent über K und L/M algebraisch ist. Was läßt sich über den Grad $[L : M]$ sagen?

Aufgabe 19.

Sei K ein Körper. Zeigen Sie, daß der Quotientenkörper von $K[[X]]$ isomorph zu

$$K[[X]][Y]/(XY - 1)$$

ist.

Aufgabe 20.

Seien $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$ transzendent über \mathbb{Q} . Zeigen Sie, daß der Isomorphismus $\mathbb{Q}(\alpha) \simeq \mathbb{Q}(\beta)$, der α auf β abbildet, nicht stetig ist bezüglich der von \mathbb{R} geerbten Topologie.

Tipp: Zeigen Sie, daß ein stetiger Isomorphismus sich zu einem Automorphismus von \mathbb{R} fortsetzen würde.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 25.10.2014, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/52065465/Algebra-WS2014_15

21. November 2014